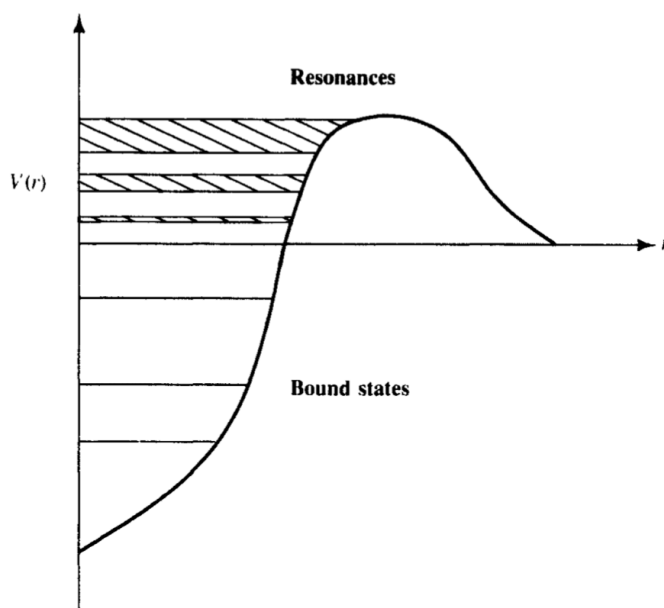


共振现象

一.背景

理解共振现象是理解稳定核与奇异核的核现象的基本条件。当我们接近质子或者中子滴线时，即使是奇异核的低能激发态也是连续的，即与粒子衰变无关，此时称为共振。最终在滴线外，甚至连基态本身也是共振态。显然，共振对于奇异核都有着特别重要的作用。

由于存在库仑势垒我们可以将其势函数看作这样的形状，在这种条件下，系统存在以下的几种相对状态。在这里我们观察这张图，可以发现，在 E 为负数的时候存在单能级的束缚态，而 E 为正数的时候存在一定展宽连续态的能级，我们称这种状态为共振态。



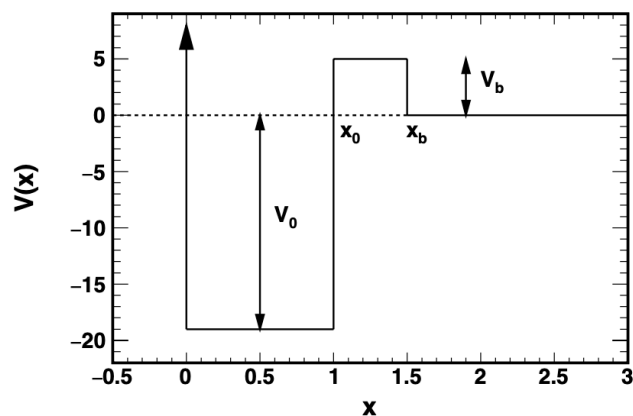
二.基础共振模型

2.1 一维单粒子模型

我们可以将上面的那个势看作是简化成以下模型，将其抽象成最简单的平均场模型：

- (1) 势阱深度为 V_0 ；
- (2) 将势阱与自由的连续态分开的势垒，高度为 V_b ；
- (3) 连续态，即在 $x \rightarrow \infty$ 时，势为0。

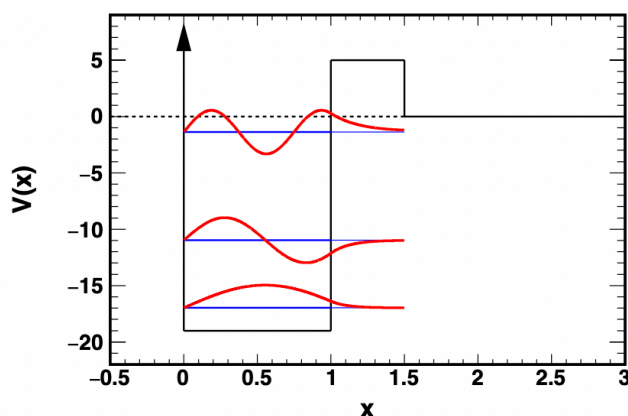
即如下图所示。我们从最简单的状态。



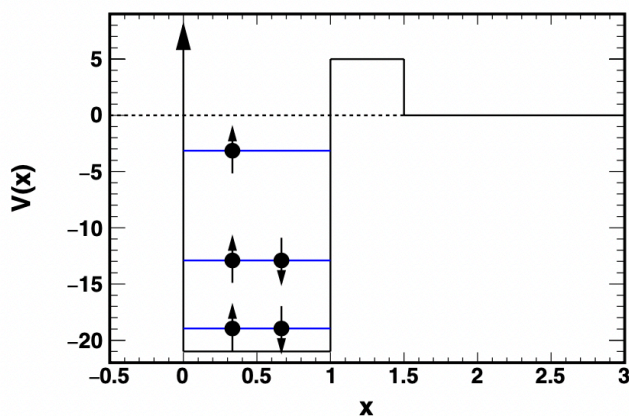
在 $E < 0$ 时，通过解薛定谔方程，与边界条件，可以得到解

$$\psi = \begin{cases} A \sin(k_1 x) & \text{for } x < x_0 \\ Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} & \text{for } x_0 < x < x_b \\ Fe^{-k_3 x} & \text{for } x > x_b \end{cases} \quad (1)$$

其中 $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_b-E)}{\hbar^2}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}$ ，通过在 x_0 与 x_b 处的连续性条件，我们能够得到这里 C, D, F 关于 A 的表达式，其波函数类似于下图所示



对于核子（质子）这样的费米子来说，每个能级可填充填充2个自旋相反核子（质子）。对于5个核子的一维原子核可以作以下填充方式。



如果我们减小势井的深度，可以想象的是，由于势垒 V_b 的存在，最终最小束缚能将会大于 0，我们将这种状态称之为共振态，然后我们考虑当 $E_b > E > 0$ 的情况，上面的通解形式可以写成

$$\psi = \begin{cases} A \sin(k_1 x) & \text{for } x < x_0 \\ C e^{k_2 x} + D e^{-k_2 x} & \text{for } x_0 < x < x_b \\ F e^{ik_3 x} + G e^{-ik_3 x} & \text{for } x > x_b \end{cases} \quad (2)$$

其中 $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_b-E)}{\hbar^2}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 在 $x > x_b$ 外我们添加了两项, 这是由于这时存在隧穿效应, 当入射波打入势垒中, 一部分进入到势井内部, 但在内部不断的来回的反射, 每次到达势垒位置都会发生隧穿, 也就是一部分的粒子透射出去成为出射波。因此每当粒子到达势垒位置内部的概率密度就会按照恒定的比例减少, 也就是说, 概率密度随时间呈指数下降。如果该系统在共振态具有寿命 τ , 那么从不确定关系我们可以知道, 该状态并不需要单一能级, 而是在范围 $\Gamma \approx \hbar/\tau$ 内的任意能量均可以满足共振态条件。这样我们设

$$E = E_r - i\Gamma/2 \quad (3)$$

将其带入到含时薛定谔方程中我们可以得到

$$|\Psi(x, t)|^2 = \exp\left(\frac{-\Gamma t}{\hbar}\right) |\psi(x)|^2 \quad (4)$$

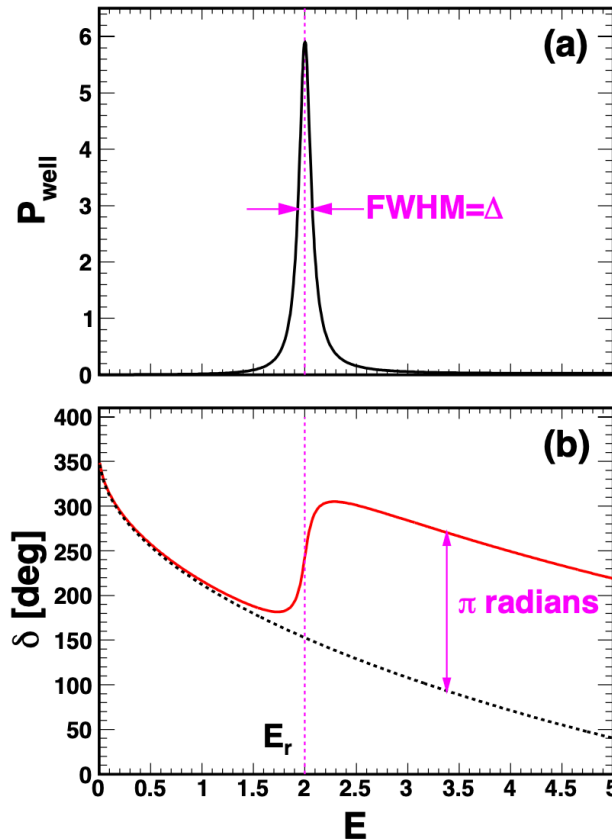
在上面通式的下, 我们给出在势垒内部的概率

$$P_{well} = \int_0^{x_0} |\psi(x)|^2 dx \quad (5)$$

而对于势垒外面, 即 $x > x_b$ 时我们可以将形式改写成以下形式

$$\begin{aligned} \psi(x) &= F \sin(k_3 x) + G \cos(k_3 x) \\ &= \sqrt{F^2 + G^2} \sin(k_3 x + \delta) \\ &= \frac{\sqrt{F^2 + G^2}}{2i} \exp(-i\delta) [\exp(ik_3 x + 2\delta) - \exp(-ik_3 x)] \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\tan \delta = G/F$, 我们不难发现入射波与出射波的相移为 2δ 。相移与 P_{well} 变化图像可以由下图获得



从另外一个角度来看待这个问题，由于相移在 E_r 附近变化的很快，相移必须在这个 Γ 的能量范围内迅速增加 π ，因此，在 E_r 前后相移分别增加了 $\pi/2$ ，那么我们可以假设相移有着以下的这种形式，

$$\begin{aligned}\delta_{\ell_0}(E) &= \bar{\delta}_{\ell_0}(E) + \delta_{\ell_0}^{(R)}(E) \\ \tan \delta_{\ell_0}^{(R)}(E) &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{E - E_R}\end{aligned}\quad (7)$$

即将相移考虑成两部分，一部分为共振相移，另一部分为非共振相移。而非共振相移相对于共振相移要远小于 $\pi/2$ ，所以这样我们忽略非共振相移，则 $\sin^2 \delta_{\ell_0}(E)$ 可以表示为，

$$\sin^2 \delta_{\ell_0}(E) = \frac{\tan^2 \delta_{\ell_0}(E)}{1 + \tan^2 \delta_{\ell_0}(E)} = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}\quad (8)$$

则截面可以近似表达为

$$\sigma_{\text{scat}} \simeq \frac{\pi(2\ell_0 + 1)}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}\quad (9)$$

上面这个形式被称为Breit-Wigner形式。

我们从这个简单的一维单粒子模型获得了共振现象的3个重要的特征。

- (1) 若原子核处于共振态，它将以指数形式衰减，寿命为 Γ/\hbar
- (2) 共振也可以在散射实验中探测，其中散射截面（与 P_{well} 相关）在共振能量处达到峰值，半高宽为 Γ
- (3) 散射波函数外部区域的非共振相移相对于变化较慢的，共振相移在 E_r 处发生 π 的跃变。

这三个特征非常普遍，同样适用于我们简单的一维单粒子模型无法充分描述的更复杂的共振。

2.2 三维单粒子模型

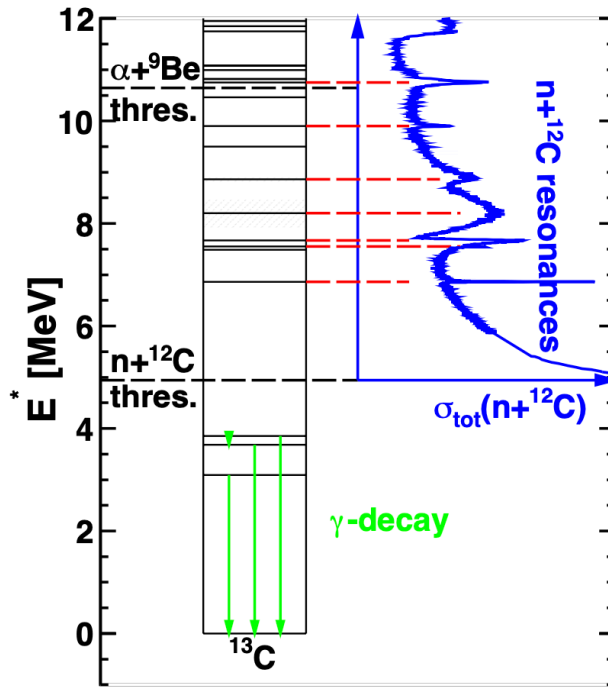
我们知道在三维下散射波函数在 $r \rightarrow \infty$ 时，可以写成以下形式

$$\psi \rightarrow \exp(ik_{\infty}z) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2ik_{\infty}r} (S_{\ell,j} - 1) \exp(ik_3r) P_{\ell}(\cos \theta)\quad (10)$$

其中 $S_{\ell,j} = \exp(2i\delta_{\ell,j})$ 。请注意，在共振时，粒子进入势垒内的可能性较大，如第2.1节所示。当这些粒子最终穿过势垒返回时，它们会向各个方向发射。因此，实验上通常使用这两种方法来观测共振现象：

- (1) 观察远离粒子束轴特定角度的散射。检测的出射粒子必须与入射粒子的能量相同（弹性散射），以此来区别其他过程
- (2) 观察粒子束轴线方向上的粒子损失，该吸收强度与总截面有关。但总截面仅对中子散射有用。由于库仑势的长程性质，这个总截面对于带电粒子散射来说是无限的，所以它只对中子散射有用。

我们以一个真实核为例子，以非奇异的 ^{13}C 为例子，他的能级结构如图所示，



其中最低的三个能级是稳定的束缚态，并以 γ 衰变的形式衰变到基态。 ^{13}C 的中子分离能为 4.94MeV ，这也是 $n + ^{12}\text{C}$ 破裂反应道的阈值。高于这个能量的所有的能级都是共振态的。 ^{13}C 的 α 粒子分离能为 10.64MeV ，这是 $\alpha + ^9\text{Be}$ 破裂反应道的阈值。所以当能量介于两者之间，复合核的衰变模式只有中子发射这一种。而在 10.64MeV 与 17.53MeV 之间，中子发射与 α 衰变均是可能的衰变模式（质子的分离能为 17.53MeV ）。我们可以看到在总截面上有很多峰，基本上与 ^{13}C 的激发态一一对应。但并非所有高于中子发射阈值的激发态都有相关的共振态。这些峰并没有很强的单粒子结构。

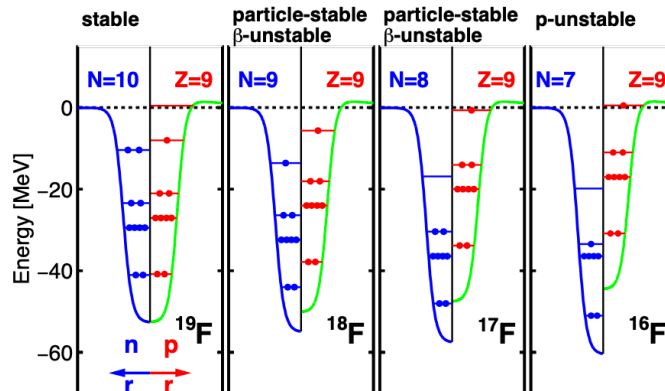
2.3 平均场势的对称依赖

之前的我们并没有对核子的种类进行区分，我们假设一个核子收到的相互作用是其他核子的平均势产生的，但若假设质子-中子相互作用比质子-质子相互作用或中子-中子相互作用要强，那么即使我们选取相同的核子，但改变中子与质子的比例，两种核子收到的相互作用也会改变。而他们的势井深度有着以下的关系：

$$\begin{aligned}
 V_0 &= V' + v_{\text{sym}} \frac{N - Z}{A} \text{ protons} \\
 &= V' - v_{\text{sym}} \frac{N - Z}{A} \text{ neutrons.}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

其中 V' 与 v_{sym} 为常数，对于丰中子系统，当对称参数 $\frac{N-Z}{A}$ 较大时，质子被更多的中子包围，因此平均场的深度更深；反之亦然。在用于拟合与预测原子核结合能的半经典质量公式中，平均场大约贡献了50%的对称能

$$E_{\text{binding}}(Z, A) = a_{\text{vol}} A - a_{\text{sur}} A^{2/3} - a_{\text{Coul}} \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{asy}} \frac{(N - Z)^2}{A}.
 \tag{12}$$



^{19}F 是氟元素唯一的稳定的同位素，由于对称依赖，平均场的这种变化使得中子与质子的分离能有着显著的差别，若差别足够大，则系统有着向更稳定的方向演化的趋势，即对于氟18、17、16来说就是 β 衰变质子发射。同样在氟16中我们可以看到它的一个质子处于共振态中（p不稳定性）。

三.超越单粒子模型

在单粒子的模型中，原子核共振态现象是通过将一个或者多个核子置于单粒子共振态产生的。为了产生单粒子共振，我们需要一个势垒来长时间约束里面的核子。所以在这个模型中，当 $l = 0$ 时的中子是不可能产生共振的（没有库仑势垒与离心势垒）。因此使用中子轰击自旋为0的靶核时，我们不应该看到任何 $J = 1/2^+$ 共振态，而实际的实验中，这种共振态是相当常见的。

此外，即使存在势垒，在单粒子模型中是不可能在高激发能下产生共振的。然而实际上，共振在较高的能级上依然是存在的。这显然也是单粒子模型中的一个失败。

而这是由于在真实原子核的内部可能存在多个单粒子模型，这些单粒子系统混合构成了真实的核态，如果对于一个核态来说，一个单粒子或者是几个单粒子系统占主导的话，那么这个核态就会表现出较强的单粒子特性。考虑核子散射过程，我们可以将其看作是当核子与靶核开始接触时，这个初始的单粒子系统，有可能继续耦合成为更加复杂的构型，在这些单粒子系统的内部核子收到势垒的约束。

同时这种混合构形也允许共振有着多种的衰减路径。比如共振态C耦合到开放反应道 $a + b$, $d + e$ 我们可以观察到散射相关截面

$$\begin{aligned}
 a + b \rightarrow C \rightarrow a + b, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{a+b}^2}{(E - E_r^{a+b})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2} \\
 a + b \rightarrow C \rightarrow d + e, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{a+b}\Gamma_{d+e}}{(E - E_r^{a+b})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2} \\
 d + e \rightarrow C \rightarrow a + b, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{d+e}\Gamma_{a+b}}{(E - E_r^{d+e})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2} \\
 d + e \rightarrow C \rightarrow d + e, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{d+e}^2}{(E - E_r^{d+e})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2}
 \end{aligned} \tag{13}$$

（具体过程在Lectures on Quantum Mechanics by Steven Weinberg 8.5节）其中
 $G = \pi/k_\infty^2 (2J_C + 1)/(2J_1 + 1)/(2J_2 + 1)$, J_C 为共振态C的自旋，每个衰减通道都有一个衰变的宽度 $\Gamma_{d+e}, \Gamma_{a+b}$,
 $\Gamma_{tot} = \Gamma_{a+b} + \Gamma_{d+e}$ 。

在R矩阵中，对于反应道 λ 的衰变宽度可以表示为

$$\Gamma_\lambda = 2k_\infty R P_l \Theta_\lambda^2 \gamma_\lambda^2 \tag{14}$$

R是反应道半径， P_l 是与角动量有关的透射率， $\gamma_\lambda^2 = 3\hbar^2/2MR^2$ 为简化的单粒子宽度， Θ_λ^2 是分数缩减宽度（?）。对于纯单粒子模型， $\Theta_\lambda^2 = 1$ 。对于混合态来说 $\Theta_\lambda^2 < 1$ 。

四.实验技术与测量奇异核共振

五.三体共振

在上面我们考虑都是两体问题中的共振现象（出射通道与入射通道均为两体）。然而，在共振现象中其实反应道中可以存在更多的粒子。在实验中，目前没办法做到三粒子散射，我们需要其他的反应机制来创造这些共振态，然后观测多粒子的出射反应道。

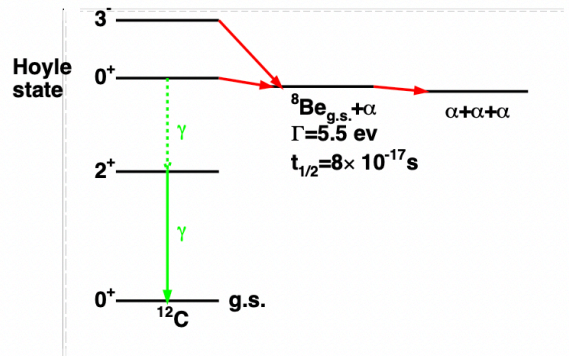
三体共振通常分为以下两种：

- (1) ‘快速’或‘真实’的三体衰变，所有的碎片均在同一共振态衰变中产生
- (2) 连续，首先衰变成两个碎片，其中一个碎片处于共振态发生再次衰变

这里只要中间的碎片共振态寿命较长就可以认为两个过程之间不存在相互作用。

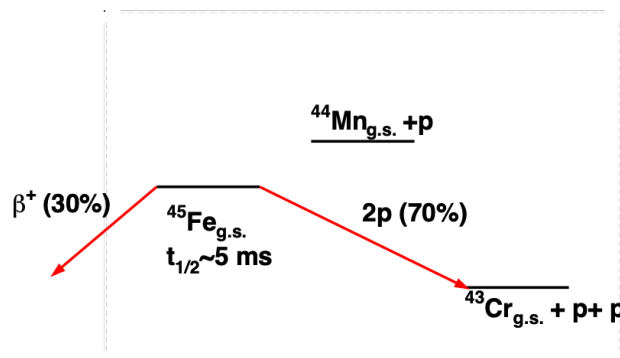
5.1 连续衰变

连续三体衰变，如 ^{12}C 首先衰变成 $^8\text{Be}_{g.s.} + \alpha$ 再衰变成 3α 。在中间的半衰期中第一个发射的 α 粒子已经离开了370000fm，而 ^{12}C 的半径仅为3fm。所以两步之间可以看作是没有相互作用的。

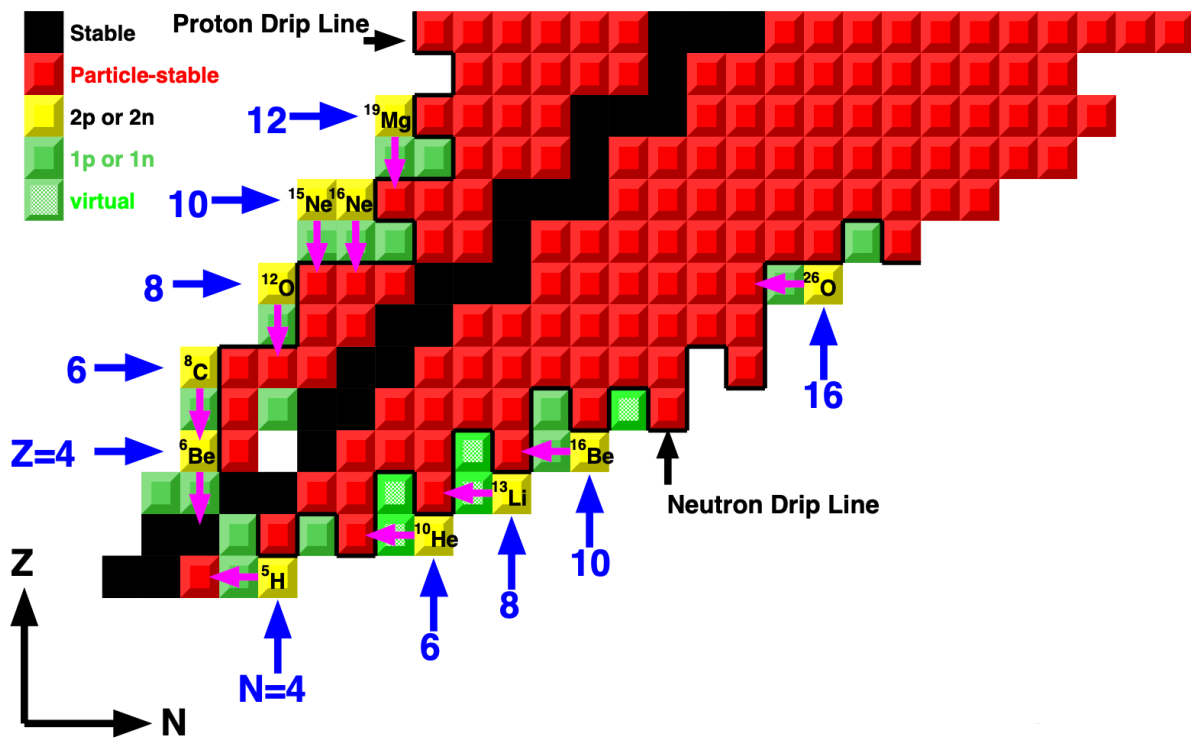


5.2 双核子衰变

Goldansky于1960年首次考虑从奇异核基态迅速发射两个核子的可能。基态的不可能变成 $^{44}\text{Mn}_{g.s.} + p$ ，所以仅有这一种可能。在基态两个质子发射体的出现是配对相互作用的结果，使得偶数Z核相对于奇数Z核更受束缚。因此，如图19所示的情况，其中一个质子通道不可访问，而两个质子可用，仅适用于质子滴线以外的偶Z核基态。除 ^{45}Fe 外，还发现 ^{48}Ni 的基态具有这种性质。（还有一种democratic type）



5.3 滴线外单核子和双核子衰变的研究



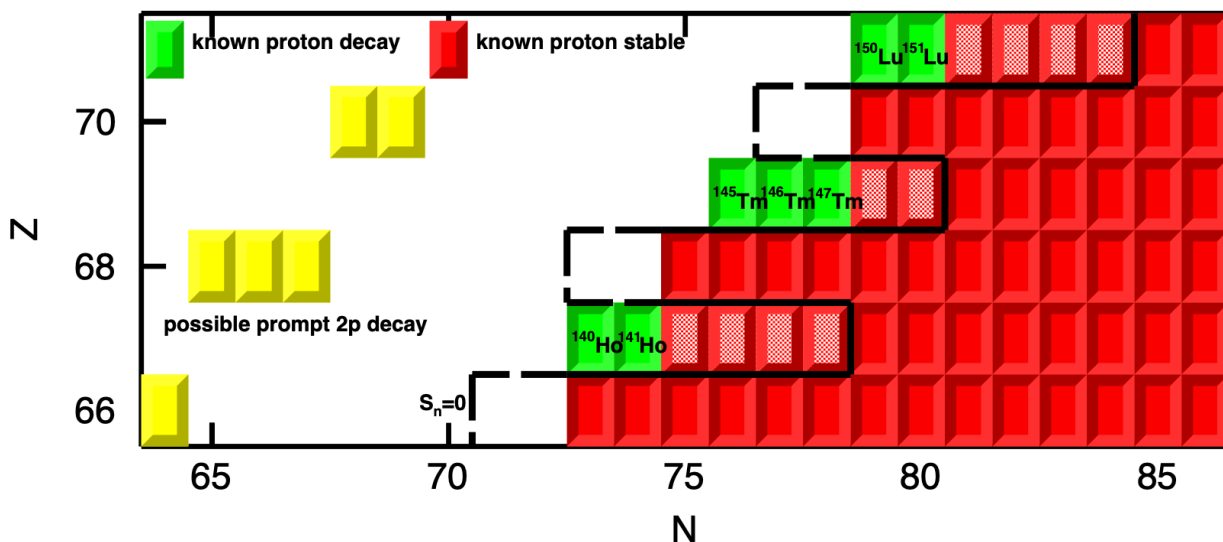
在图中表示了了在滴线外的核衰变的方式。

双核子发射的寿命取决于约束两个价核子的势垒高度。基态双核子发射说明了通常核寿命的增加往往取决于库仑势垒的增加。最轻的双核子发射核为 ${}^6\text{Be}$ ，其的寿命为 $5 \times 10^{-21} \text{ s}$ ，而 ${}^{19}\text{Mg}$ 约为4ps， ${}^{45}\text{Fe}$ 的寿命约为2ns。显然更重的两核子发射的核寿命更长。

通常认为由于双中子发射只有离心势垒，所以它的寿命应短得多。但其中有一个例外，对于 ${}^{26}\text{O}$ 而言，其寿命为4.5ps。势垒透射率取决于势垒的高度与势垒内部状态的能量。Grigorenko等人的计算表明，这种状态需要的衰变能量非常小，小于1keV才能达到如此长的寿命。

5.4 重同位素

目前的中子滴线可确认的元素是氧，因此没有更多的关于重中子基态核衰变的的信息。在另一方面，可确定的质子滴线上的元素最高为铽元素。例如，在下图中我们展示了在铽 ${}^{69}\text{Tm}$ 为中心附近的元素。黑色实线表示实验测得质子滴线，而偶数部分的滴线并没有得到测量，黄色部分是推测的可能会发生快速双质子发射的同位素。由于奇偶作用，滴线具有很强的手指结构（像个手指插进去的样子）。但是在底线外的元素请注意，有的元素的衰变模式并没有得到完全确定。例如直到 ${}^{147}\text{Tm}$ 基态质子衰变才被完全确定，而在这里也仅有15%是由质子发射贡献的，而其他部分是由弱衰变贡献的，如 β 衰变与电子俘获。这是由于比较大的库仑势垒抑制了质子衰变的发生，而当远离滴线这种趋势才发生转变。

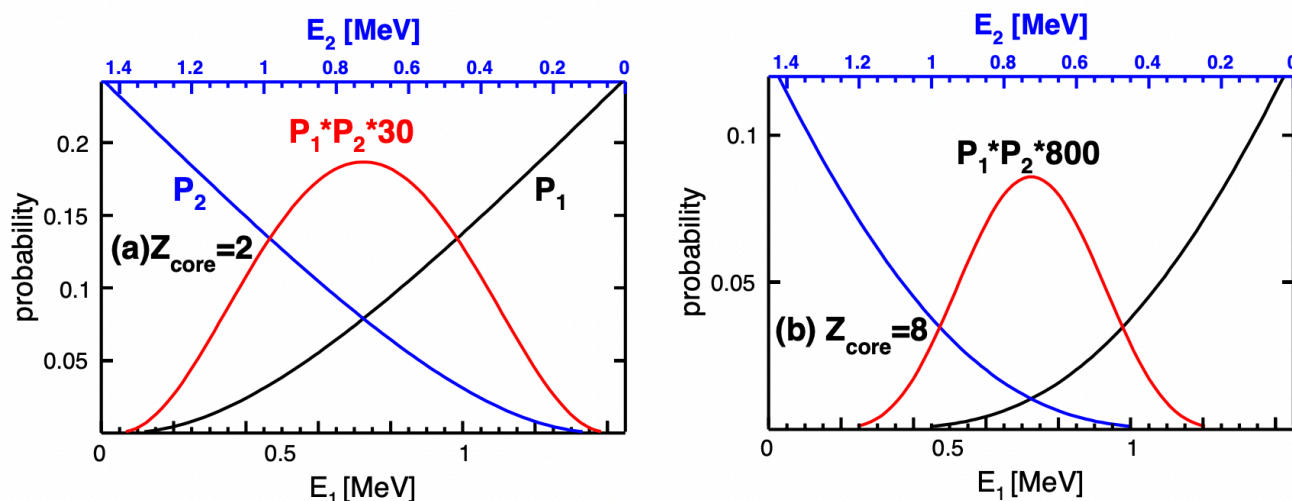


5.5 在双核子发射中的联系

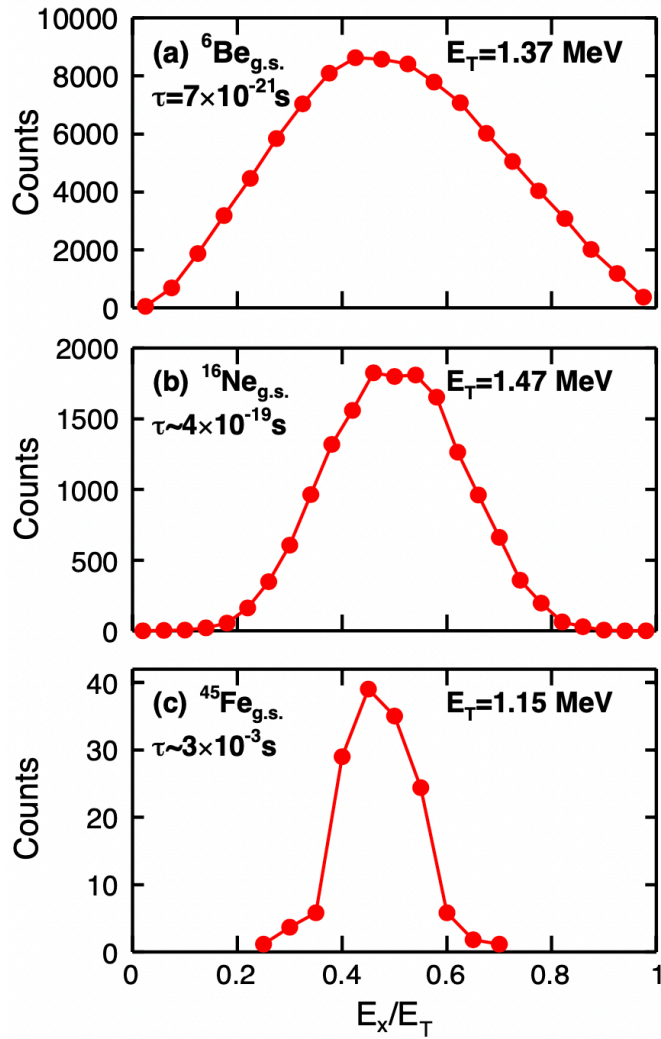
在双核子发射这个系统中显然要处理一个三体问题，三个衰变产物都有自己的动量（也就是一共有9个变量），而在衰变过程中要满足动量守恒（总动量为0），这样变量变为6个。同时产物的总动能应等于固定的衰变释放的能量，这样又减少了一个变量。最后，动量任意方向都可以通过三个欧拉角随机旋转表示，这些方向被认为是等价的。这样这留给我们最后两个变量描述整个衰变过程，这样我们可以选择一个二维分布上描述三个产物之间的动量关系。我们将这种关联只集中于其中一个方面，即两个质子。若当中心的质量很大时，我们可以core的动能忽略不计，则两个质子分享总衰变释放的能量，即 $E_1 + E_2 = E_T$ 。这样 E_1 的分布函数 $f(E_1)$ 可表示为 E_1, E_2 概率的乘积：

$$f(E_1) \propto P(E_1)P(E_2)$$

在下图中展示了，总衰变能为1.45MeV、 $Z_{core} = 2, 8$ 时的两个质子的穿透因子与动能的依赖性。分布函数的峰值位置位于 $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}E_T$ 。穿透子屏障越多，穿透速率随动能增长的就越快，因此衰变产物的峰值就越窄。随着质量越重，库仑势垒越大，两个质子的衰变穿越势垒、围绕相等能量共享的波动也越小。同时实验测量也证明了这一趋势。

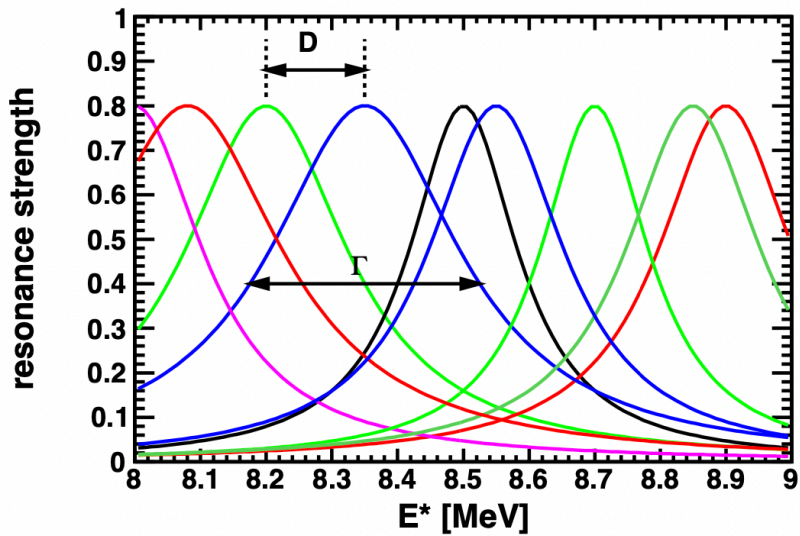


图中展示了实验测量中质子动能的分布函数（质子动能与总衰变能量之比 E_x/E_T ，其中 E_x 表示 E_1 或者 E_2 ）。所有的峰值都指向约等于0.5时，即出射的两个质子的动能相等。同时当core的质量数增加，整个分布变窄。



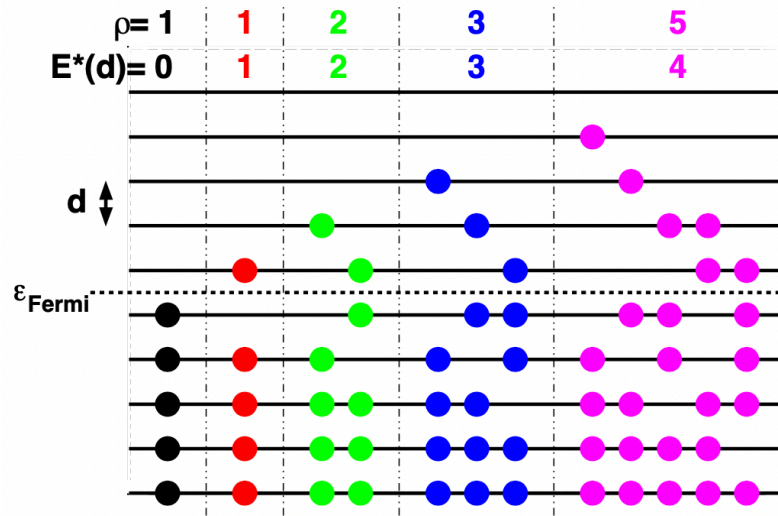
六.复合核衰变

到目前为止，我们关注的是基态或者低激发态时的共振现象。当激发能量升高，在两个共振态之间的间隙变得更小，或者换句话说，能级密度增加，共振态的平均宽度增加。以至于我们得离开之前单个共振的观点（即彼此是分离的），而引入共振态交叠的概念（复合核的概念）。



6.1 能级密度

我们可以从单粒子模型解释为什么随着激发能量的增加，能级密度也会迅速变大。不考虑核子种类与自旋。我们假设单个粒子能级具有均匀的间距 d 。很显然在这个模型中激发能只能是 d 的整数倍。



上图通过穷举法说明了为什么，激发能越高，对应的能级密度越高。想要获得激发能为 $1d$ 只有一种方法，而想要的得到 $2d$ 则有2种方法，想要得到 $3d$ 则有3种，而 $4d$ 有5种方法（其中有一个路径可以看做是双核子发射。当激发能上升到 $10d$ 时，此时就有了42种不同的激发方式。这也就说明当激发能量上升的时候，能级密度迅速增加。

这类问题的解析解首先由Euler于1737提出。而对于费米气体能级密度，其解析解由Bethe于1936年给出，

$$\rho(E^*) = \frac{1}{\sqrt{48E^*}} \exp(2\sqrt{aE^*}) \quad (15)$$

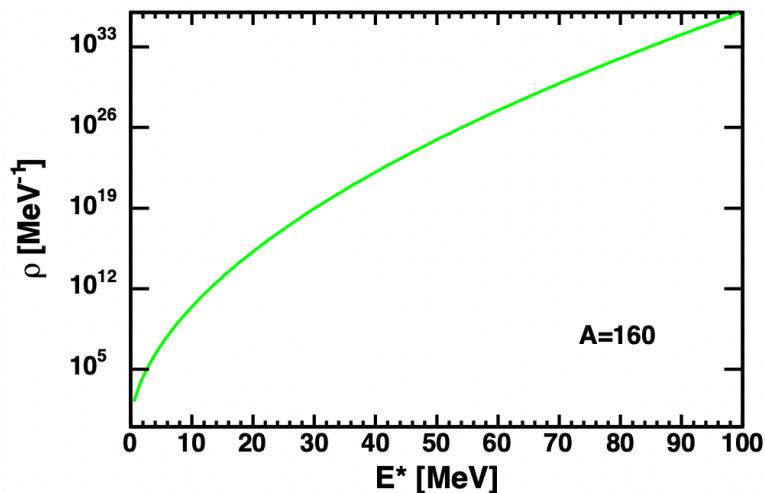
其中能级密度参数

$$a = \frac{\pi^2}{6} g \quad (16)$$

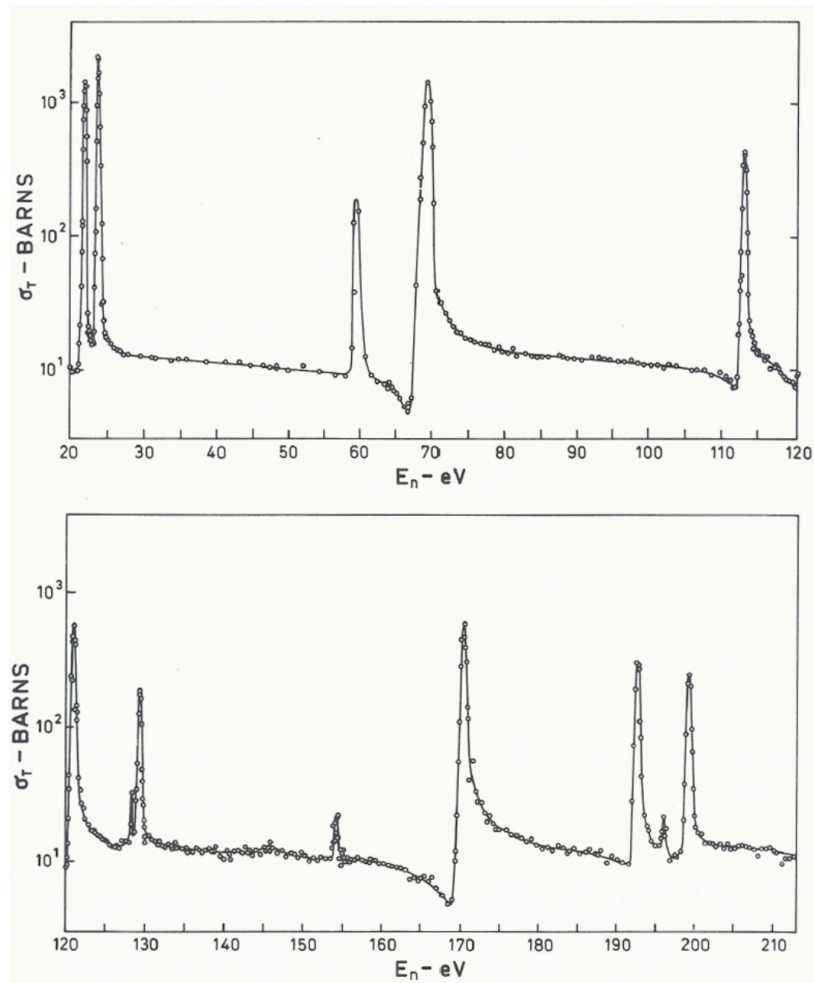
其中 g 为单粒子能级密度。在我们上面采用的最简化的模型中 $g = 1/d$ ，将其推广到不同粒子与不同的分布状态。

$$a = \frac{\pi^2}{6} [g_n(\varepsilon_{Fermi}^n) + g_p(\varepsilon_{Fermi}^p)] \quad (17)$$

我们使用真实的单粒子能级，得到费米气体模型中给出的能级密度。



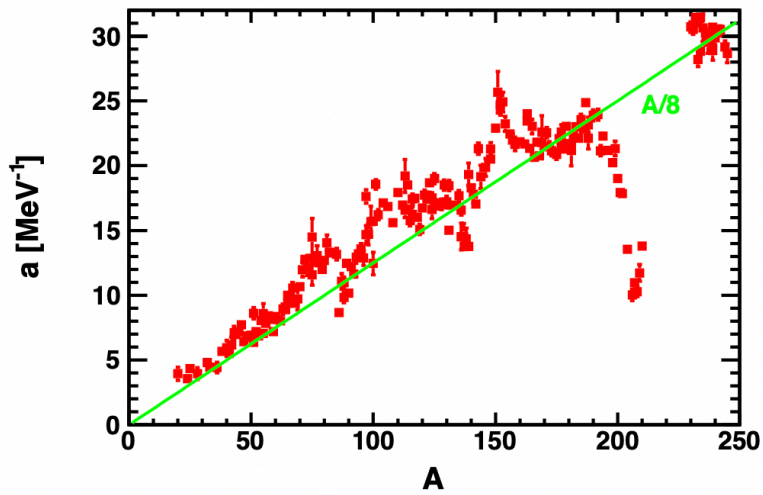
显然对于大质量的重核来说，基本不可能明确其共振区全部的能级。然而当中子能量仅高于中子的阈值时，我们只能在弹性散射和总截面测量中，看到当 $l = 0$ 时的共振。例如在 $n + {}^{232}\text{Tm}$ 的截面中，在较小的能量下，当 $l > 0$ 时，势垒的透射率十分小。例如当 $E_n = 100\text{keV}$ 时，透射率 $P_0 = 1$ ，而 $P_1 \sim 10^{-4}$ ，这时显然 $l > 0$ 时，我们可以忽略不计。



上面的峰对应的态都是 $l = 0$ 时， $J = 1/2^+$ 。这样我们通过实验获得了它的单粒子能级密度。这样，同时对于费米气体有着关于 J, E 的能级密度公式：

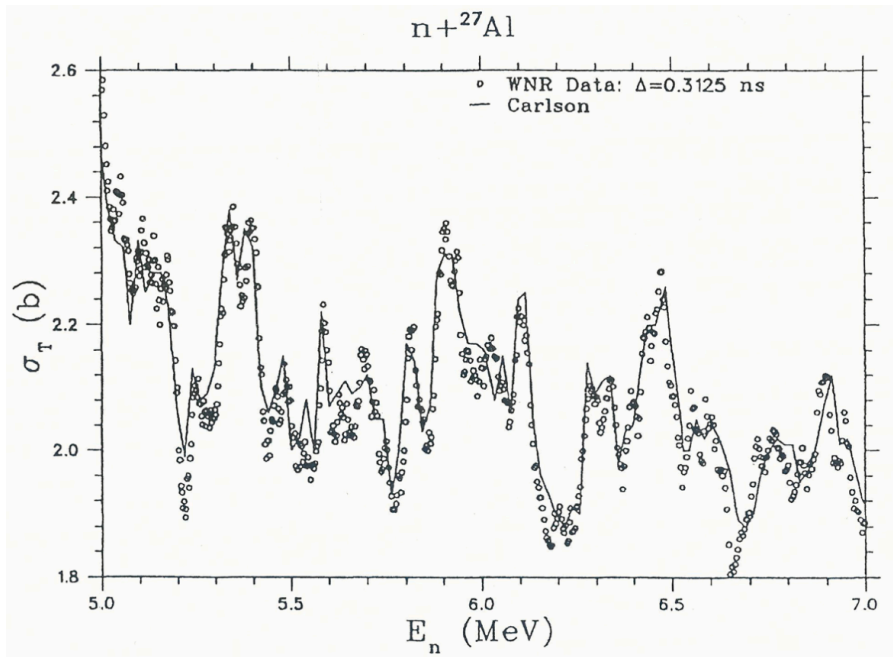
$$\rho(E^*, J) \propto a^{5/2} \frac{2J+1}{\left(E^* - \frac{J(J+1)}{2\mathcal{I}_{rig}}\right)^{7/4}} \exp \left[2\sqrt{a \left(E^* - \frac{J(J+1)}{2\mathcal{I}_{rig}}\right)} \right] \quad (18)$$

其中 \mathcal{I}_{rig} 是核的刚体转动惯量。使用这个关系我们能够从 $s_{1/2}$ 态得到能级密度。同时参数 a 满足关于质量数 A 的线性回归。 $a = A/8\text{MeV}^{-1}$ 。同时注意到其中在一些位置有比较大的波动，这是由于在这些位置上对应着闭壳结构，最低谷对应的是 ${}^{208}\text{Pd}$ 双幻数。

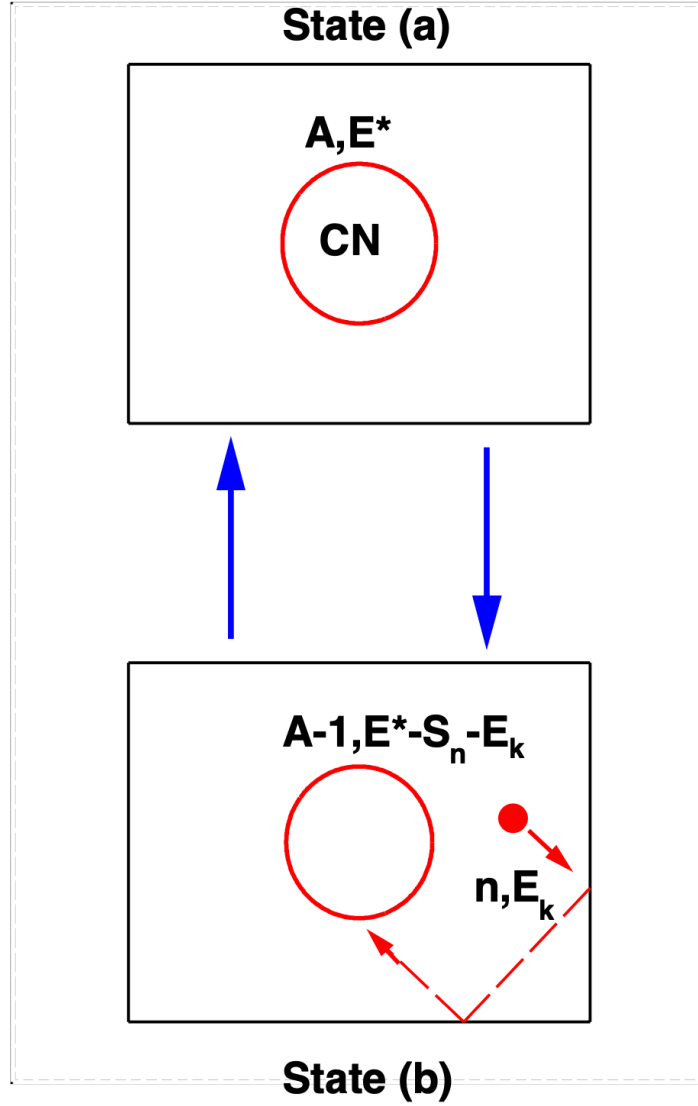


6.2 重叠区的衰变

在高级别的激发态，能态密度往往是十分稠密的，则导致在可能同时存在多种衰变途径混合在一起的情况。因此这个区域中混合途径特别强烈，而通常能级不会显示很强的单粒子性。同样，通过这种强混合，共振的衰减可以扩展到许多出射反应道。而这种现象中我们可以在 $5 \sim 7 \text{ MeV}$ 时的 $n + {}^{27}\text{Al}$ 截面中发现，可以发现仅在 2 MeV 的区间内就存在众多的峰值，这里的峰值往往超过了平均衰变能量宽度，这是由于该过程中涉及大量的共振，我们无法预测这些波动的细节。但可以预测整体的截面趋势，而通过统计方法可以消除实验中这部分波动反应（对实验数据进行平滑处理）。



6.3 粒子蒸发



在统计模型中，Weisskopf与Ewing使用细节平衡方法确定了重叠区的中子发射与带电粒子发射的总衰变宽度。若一个复合核(CN)的激发能为 E^* 在一个体积为 V 的正方体中，内部的墙壁是弹性的。若CN衰变产生一个动能在 $E_k \sim E_k + dE$ 之间的中子(速度为 v ，动量为 p)。这样由能量守恒我们可以得到衰变之后的剩余核的激发能为 $E^* - S_n - E_k$ 其中 S_n 是中子的结合能。中子可以在正方体的四壁发生弹性碰撞，直到最终被复合核再次吸收。这样在两个不同的状态之间，我们能够建立一个平衡模型。

$$\rho_a w_{ab} = \rho_b w_{ba} \quad (18)$$

其中 ρ 分别为a态与b态的态密度，而 w_{ab} 为a态到b态的转化率，反之亦然。现在我们使 $\rho_a = \rho_{CN}(E^*)$ ，而对于b态我们考虑为剩余核d与n态密度的叠加，考虑到在相空间中状态数可以表达为

$$\Omega_0 = \frac{1}{N! h^{3N}} \int_{\sum p^2 \leq 2mE} d^{3N}q d^{3N}p = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int_{\sum p^2 \leq 2mE} d^{3N}p \quad (19)$$

其中 q 为坐标变量， p 为动量变量， N 为粒子数，且对于动量球面 $d^3p = 4\pi p^2 dp$ ，对于中子我们可以将其改写为，

$$\rho = 4\pi p^2 V / \hbar^3 dp / dE_k dE_k \quad (20)$$

考虑自旋简并 $2s + 1$ ，而剩余核的态密度可以表示为 $\rho_d(E^* - S_n - E_k)$ ，则态b的态密度可以写成，

$$\rho_b = (2s + 1) \frac{4\pi p^2 V}{\hbar^3} \rho_d(E^* - S_n - E_k) \quad (21)$$

同时 w_{ba} 与剩余核的中子俘获反应截面有关，且有着以下的关系

$$w_{ba} = \frac{v \sigma_{inv}}{V} \quad (22)$$

这样由式 (18) 获得了 w_{ab}

$$w_{ab} = \frac{\Gamma_n(E_k)dE}{\hbar} = \frac{(2s+1)m}{(\pi\hbar)^2} E_k \sigma_{inv}(E_k) \times \frac{\rho_d(E^* - S_n - E_k)}{\rho_{CN}(E^*)} \quad (23)$$

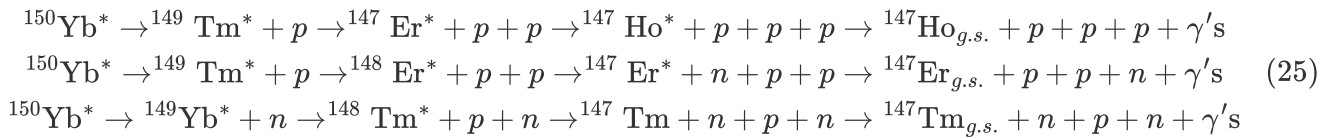
这样我们也可以获得衰变宽度 (半高宽 Γ)

$$\Gamma_n(E^*) = \frac{(2s+1)m}{(\pi\hbar)^2 \rho_{CN}(E^*)} \times \int_0^{E^* - S_n} E_k \sigma_{inv} \rho_d(E^* - S_n - E_k) dE \quad (24)$$

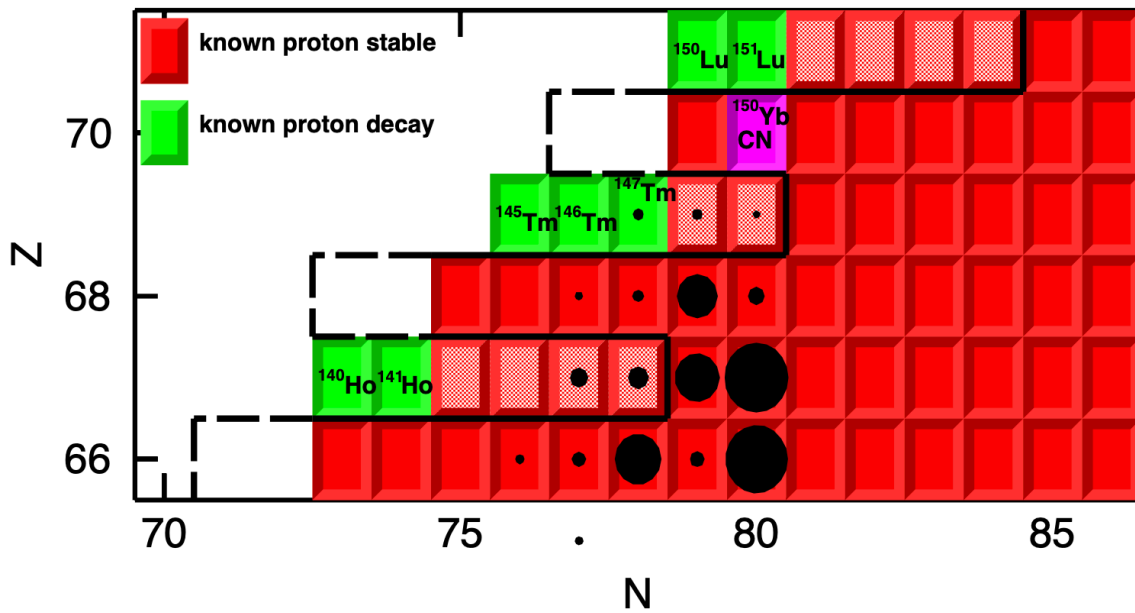
对于质子、 α 粒子发射与 γ 衰变都可以采用相似的过程。

6.4 通过聚变反应形成丰质子核

例如我们在观察质子发射时所使用的 ^{147}Tm , 是通过在 $E = 261\text{MeV}$ 下 $^{58}\text{Ni} + ^{92}\text{Mo}$ 聚变产生激发能为 $E^* = 52\text{MeV}$ 的 ^{150}Yb , 经过多次衰变直到基态 (先是粒子发射, 直到能量不允许发射粒子, γ 衰变才占主导)。例如可能的衰变路径如下 (一部分):



这种涉及计算各个可能衰变模式概率的过程, 比较适合Monte Carlo方法模拟衰变路径。下图是采用Monte Carlo方法预测的 ^{150}Yb 的衰变产物。圆点大小表示比例。



6.5 在r过程中的复合核衰变

一般认为r过程在有着高中子通量的天体环境中 (如坍塌的超新星核心) 种子核通过一系列的中子俘获反应与 β 衰变, 直到产生在中子滴线附近的同位素, 在对应的高中子环境消失之后, 这些滴线附近不稳定的同位素, 通过一系列的 β 衰变, 最后生成稳定的同位素。该过程一般认为也可以使用复合核衰变的统计模型来描述。

中子俘获反应可以通过共振进行, 其中截面由 $\sigma_{capture}$ 与 $\Gamma_\gamma/\Gamma_{tot}$, 两项给出。其中, 第一项是俘获截面, 给出了形成了共振态的概率; 第二项, 给出了形成共振态之后发生 γ 衰变, 而不是发射中子的概率。同样要考虑到重叠区的影响, 其过程类似于我们上面分析的过程, 这里不作展开。目前的研究重点在于对称参数对这个系统的影响, 与 $a = A/8\text{MeV}^{-1}$ 关系是否还成立上。