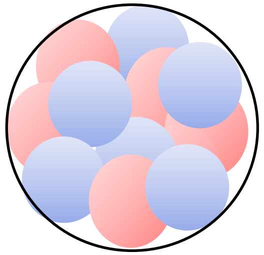
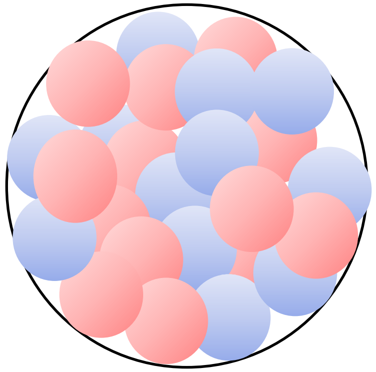
My work

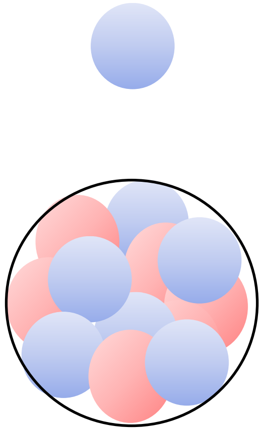
optic potential

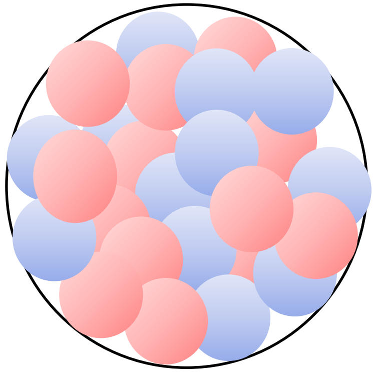




现在我们想要求解一个两体的波函数，并通过求解的波函数计算一些观测量。显然，要想求解这个两体系统的波函数，我们就必须知道这个体系之间的相互作用势。

Folded potential

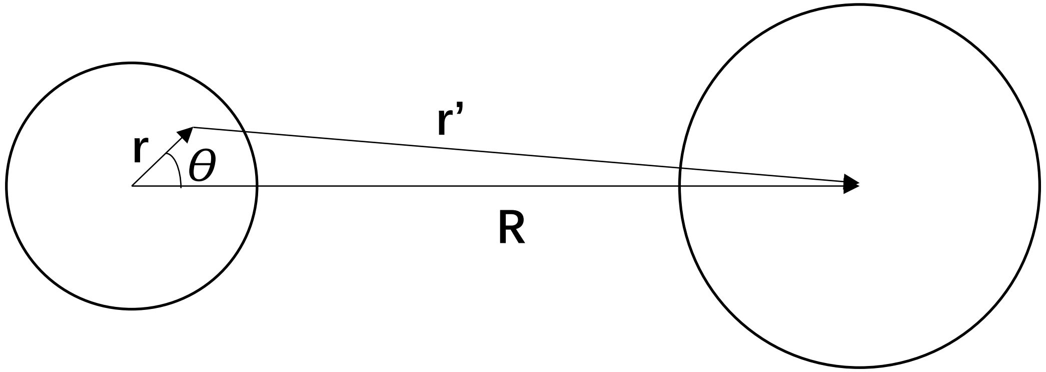




根据以往的研究，我们得到了核子与一些大核之间的相互作用势，它是一个既有实部又有虚部的复数势，称为光学势。实部描述了核子与核之间的弹性散射，虚部描述了非弹性散射的部分。

核子与核之间的相互作用可以由光学势来描述，自然地，两个大核之间的相互作用势应该是核子与核之间光学势的叠加。

Folded potential



核子在核的内部有一个密度分布，我们在距离弹核中心r处取一个小体积元

$$dv = r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

这个小体积元到靶核中心的距离为 $r' = \text{sqrt}（R + r - 2Rrcos\theta）$

且我们知道在 r 处的核子密度为 $\rho(r)$, 则这部分体积元与靶核之间的相互作用为

$$dU(R) = \rho(r) u(r') r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

对弹核的整个体积积分就可以得到弹核与靶核之间的相互作用势

$$U\ (R) = \int \rho(r) u(r\ ') r^2\ sin(\theta) dr\ d\theta d\phi$$

计算程序

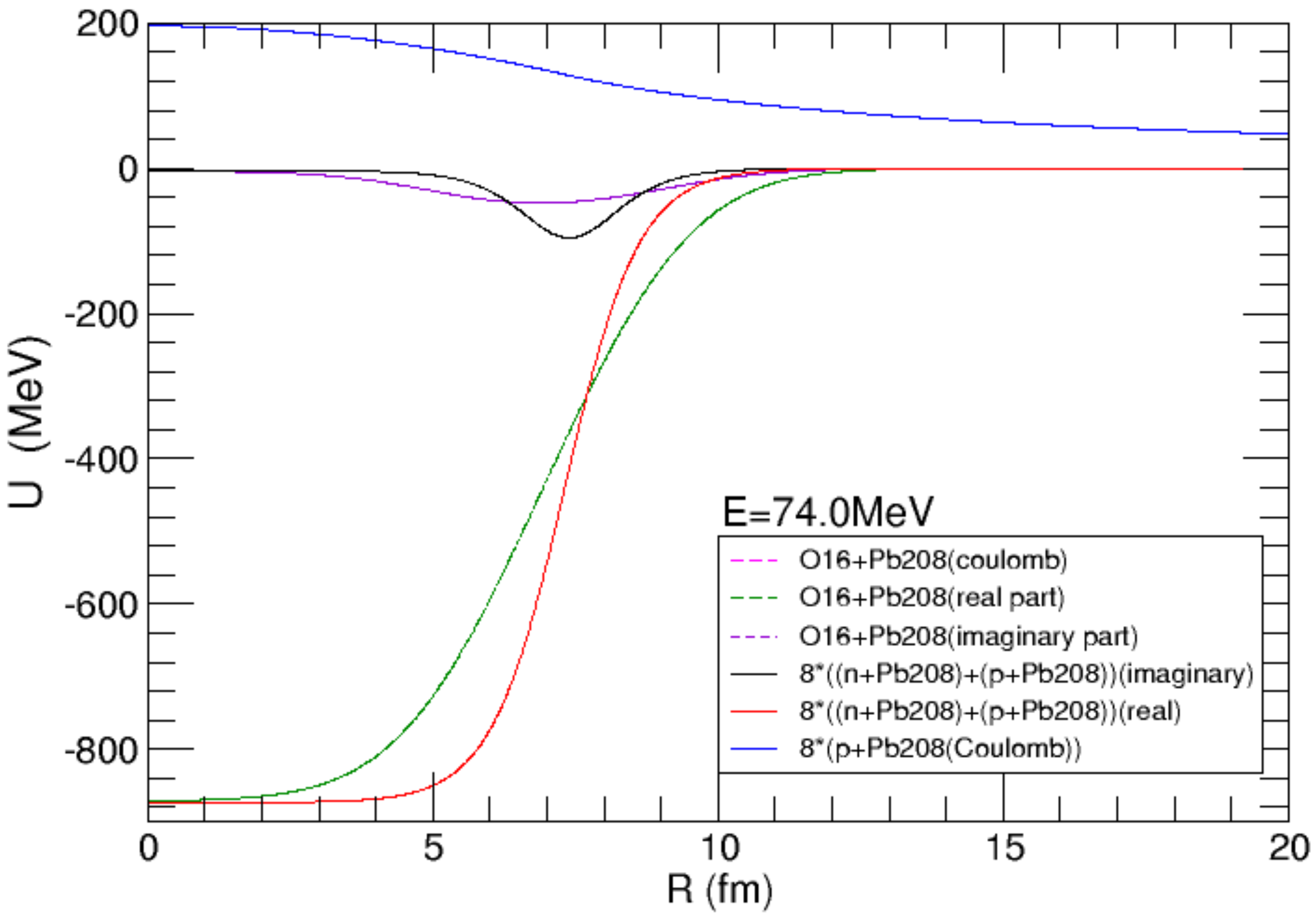
```
subroutine folding(URz,VRz,Z1,Z2,A1,A2,E)
```

URz 为输出的核势(一维大小为 n 的矩阵)
URz 为输出的库伦势(一维大小为 n 的矩阵)
Z1 为弹核的质子数;
A1 为弹核的质量数;
Z2 ~~为靶核的~~质子数;
A2 为靶核的质量数;
E 为弹核入射时的能量。

$$U\ (R) = \int \rho(r) u(r\ ') r^2\ sin(\theta) dr\ d\theta d\phi \longrightarrow U\ (R) = \int \rho(r) r^2\ sin(\theta) dr\ d\theta d\phi$$

这样就只是对弹核的密度做积分，积分的结果应该是核的质量数。对O16计算结果为16.000。

计算结果



200
0
-200
-400
-600
-800
U (MeV)
0
5
10
15
20
R (fm)
E=74.0MeV
O16+Pb208(coulomb)
O16+Pb208(real part)
O16+Pb208(imaginary part)
8*((n+Pb208)+(p+Pb208))(imaginary)
8*((n+Pb208)+(p+Pb208))(real)
8*(p+Pb208(Coulomb))

散射态求解

在散射理论中，入射平面波在遇到一个散射势后，产生一个出射的球面波，在 r 很大的地方，波函数的渐近 形式应该为:

$$\psi(r,\theta)=A[e^{\mathrm{ikz}}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}]$$

下面我们就来找薛定谔方程有这种渐进形式的解。

我们首先只考虑核势，并且认为势是球对称的。由于是球对称的势，薛定谔方程可以用分离变量法来求解，分离变量之后：

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{lm} C_{lm} R_l(r) Y_l^m$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})-\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=l(l-1)$$

我们令 $u(r) = rR(r)$, 则 u(r) 满足

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2}+[V(r)+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}]u=Eu$$

对于一个 local 的势，在势能外部区域(r 比较大的地方)，我们可以认为 $V(r) = 0$, 此时上面的方程变为

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2}+[\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} - E]u=0$$

令$k^2 = 2\mu E/\hbar^2$,则

$$\frac{d^2u}{dr^2}+[\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2]u=0$$

对于不同的 l，可以得到 u 的通解为

$$u_l(r) = AF_l(kr) + BG_l(kr)$$

F_l 为 l 阶贝塞尔函数，而 G_l 为 l 纽曼函数。

所以$\psi(\boldsymbol{r})$ 可以写作：

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{lm} C_{lm} \frac{1}{kr} \left(AF_l(kr) + BG_l(kr) \right) \; Y_l^m$$

因为 e^{ikz} 是沿 着 z 方向传播的自由粒子平面波，所以其必然也可以写成上面形式

$$e^{ikz} = \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \frac{1}{kr} F_l(0, kr)$$

$$= \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \frac{1}{kr} \frac{i}{2} [H^{(2)}{}_l(0, kr) - H^{(1)}{}_l(0, kr)]$$

$$H^{(1)}{}_l(0, kr) = G_l(0, kr) + iF_l(0, kr) \qquad H^{(2)}{}_l(0, kr) = G_l(0, kr) - iF_l(0, kr)$$

$H^{(1)}$ 为第一类汉克尔函数，而 $H^{(2)}$ 为第二类汉克尔函数。当 $kr >> 1$ 时，

$$H^{(1)}{}_l(kr) \dashrightarrow (i)^{-l} e^{ikr} \qquad H^{(2)}{}_l(kr) \dashrightarrow (i)^{l} e^{-ikr}$$

我们想找薛定谔方程有这种渐进形式的解

$$\psi(r,\theta)=A[e^{\mathrm{ikz}}+f(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}]$$

$$e^{ikz}=\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}\,[H^{(2)}{}_l(0,kr)-H^{(1)}{}_l(0,kr)]$$

定义S矩阵

$$\psi(r,\theta)=A\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}\,[H^{(2)}{}_l(0,kr)-S_l H^{(1)}{}_l(0,kr)]$$

$$=A\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}\,[H^{(2)}{}_l(0,kr)-H^{(1)}{}_l(0,kr)]$$

$$-A\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}\,(S_l-1)\,H^{(1)}{}_l(0,kr)$$

$$=A\,e^{ikz}-A\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}\,(S_l-1)\,H^{(1)}{}_l(0,kr)$$

当 $kr>>1$ 时， $H^{(1)}{}_l(kr)\dashrightarrow(i)^{-l}e^{ikr}$

$$\psi(r,\theta)=A\,e^{ikz}+A\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}\,(S_l-1)\,(i)^{-l}e^{ikr}$$

$$\psi(r,\theta)=A[e^{ikz}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}]$$

$$\psi(r,\theta) = A\ e^{ikz} - A\sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}(S_l-1)(i)^{-l}e^{ikr}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1)\frac{1}{2ik}(S_l-1)P_l(\cos\theta)= \sum_l (2l+1)\frac{1}{2ik}(e^{\delta l}-1)P_l(\cos\theta)$$

以上我们讨论的都是外部波函数的解，其中外部波函数的径向部分为：

$$u_l(r) = \frac{1}{k}\frac{i}{2}[H^{(2)}{}_l(0, kr) - S_l H^{(1)}{}_l(0, kr)]$$

对于内部波函数，势能V不可忽略，我们可以用Numerov的方法求解，然后让二者在匹配点匹配，便可得到S矩阵元。

当我们首先只考虑库伦势时：

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2}+[V(r)+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}]u=Eu \qquad V(r) = Z1Z2e^2/r$$

对于不同的 l，可以得到 u 的通解为

$$u_l(r) = AF_l(\eta, kr) + BG_l(\eta, kr)$$

类比沿z方向传播平面波的表达式，在只有库伦势时，从 z 方向入射的，$\boldsymbol{r}$方向出射的波函数可以表达为:

$$\psi_c(k\hat{z},r) = \sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}F_l(\eta, kr)$$

$$= \sum_l (2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{1}{kr}\frac{i}{2}[H^{(2)}{}_l(\eta, kr) - H^{(1)}{}_l(\eta, kr)]$$

当 $r-z \dashrightarrow \infty$ 时

$$\psi_c(k\hat{z},r) \dashrightarrow e^{i[kz+\eta\ln k(r-z)]} + f_c(\theta)\frac{e^{i[kr-\eta\ln 2kr]}}{r}$$

$$f_c(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum(2l+1)P_l(cos\theta)(S_l{}^c-1)=\frac{1}{2ik}\sum(2l+1)P_l(cos\theta)(e^{2i\sigma l(\eta)}-1)$$

$\sigma_l(\eta) = arg\Gamma(1+l+i\eta)$ 叫做库伦相移

当在库伦势加上核势后，类比只有核势的解，可以得到外部波函数的表达式为:

$$\psi(r,\theta) = A \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \frac{1}{kr} \frac{i}{2} [H^{(2)}{}_l(\eta, kr) - S^n{}_l H^{(1)}{}_l(\eta, kr)]$$

在核势和库伦势作用下，总的相移为:

$$\Delta_l = \sigma_l(\eta) + \delta^n{}_l$$

则总的振幅表达式为:

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_l (2l+1) \frac{1}{2ik} (e^{\Delta l} - 1) P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l (2l+1) \frac{1}{2ik} (exp\{\sigma_l(\eta) + \delta^n{}_l\} - 1) P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l (2l+1) \frac{1}{2ik} [e^{2i\sigma l(\eta)} - 1 + e^{2i\sigma l(\eta)}(e^{2i\delta l} - 1)] P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l (2l+1) \frac{1}{2ik} [S_l^c - 1 + S_l^c (S^n{}_l - 1)] P_l(\cos\theta) \\
&= f_c(\theta) + f_n(\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_l (2l+1)\frac{1}{2ik}(e^{\Delta l}-1)P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l (2l+1)\frac{1}{2ik}(exp\,\{\sigma_l(\eta)+\delta^n{}_l\}-1)P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l (2l+1)\frac{1}{2ik}[e^{2i\sigma l(\eta)}-1+e^{2i\sigma l(\eta)}(e^{2i\delta l}-1)]P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l (2l+1)\frac{1}{2ik}[S_l{}^c-1+S_l{}^c(S^n{}_l-1)]P_l(\cos\theta) \\
&= f_c(\theta)+f_n(\theta)
\end{aligned}
$$

其中:

$$f_n = \frac{1}{2ik}\sum(2l+1)P_l\,(cos\theta)S_l{}^c\,(S_l{}^n-1)$$

$S_l{}^c$其可以通过库伦相移得到 $S_l{}^c = e^{2i\sigma l(\eta)}$ $\sigma_l(\eta) = arg\Gamma(1+l+i\eta)$

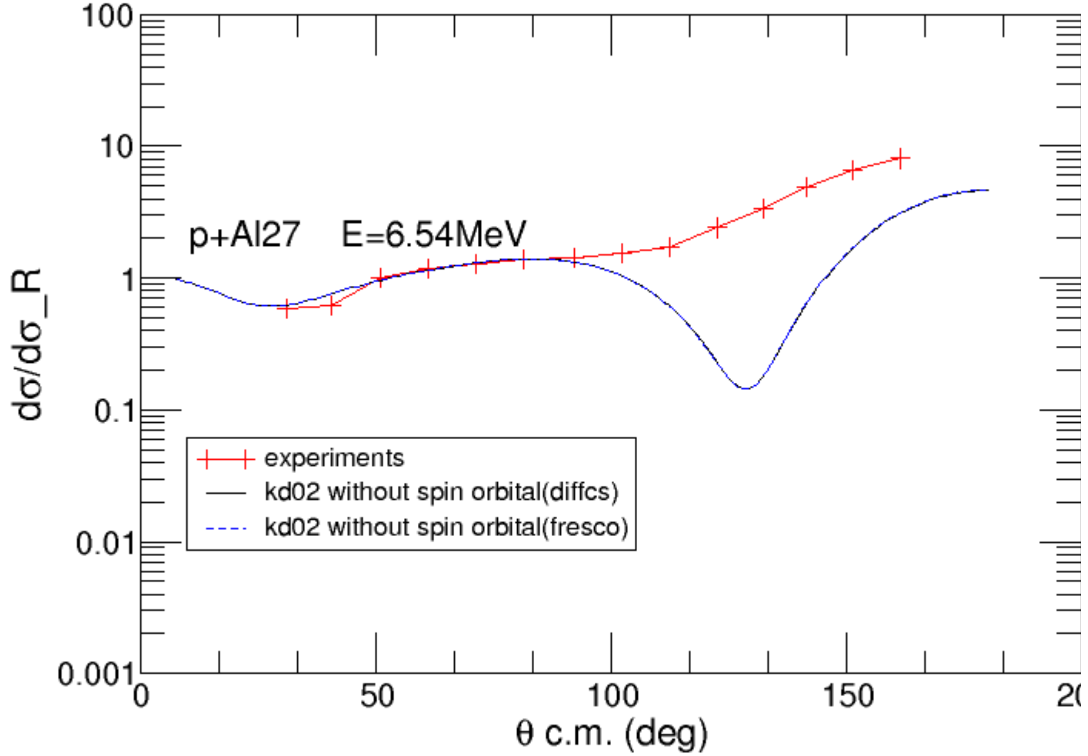
$S_l{}^n$其可以通过核势势井内外的波函数匹配得到

求解程序

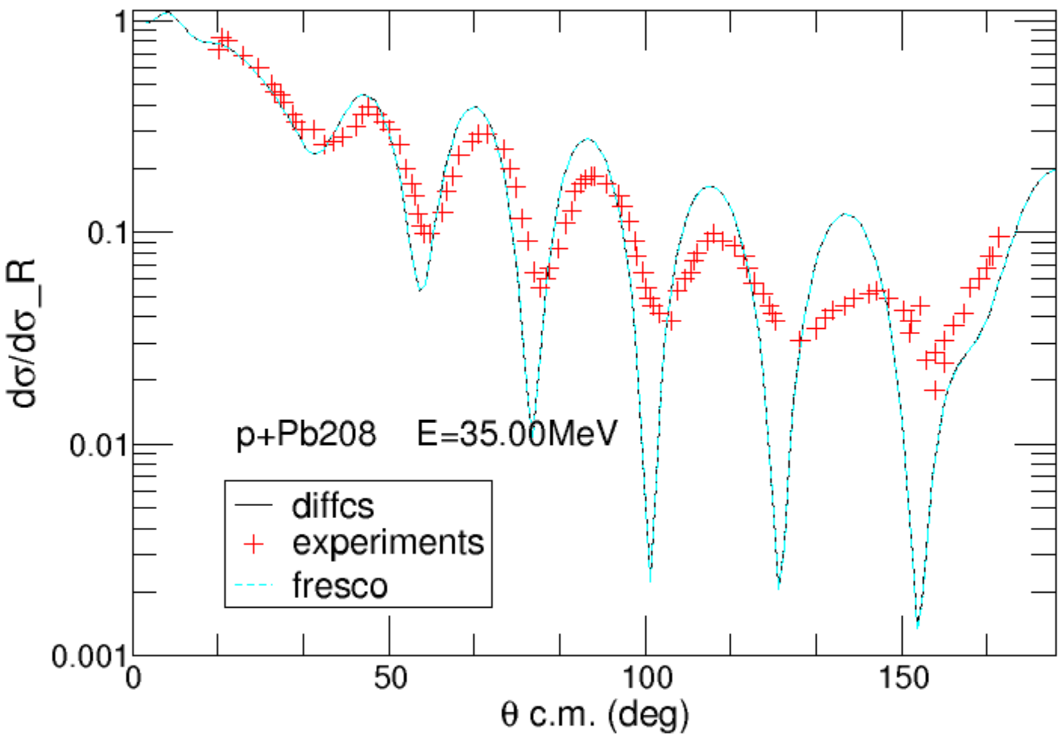
subroutine npscattering(Vn,Vc,Z1,Z2,A1,A2,E)

Vn为输入的核势(一维大小为 n 的矩阵)
Vc为输入的库伦势(一维大小为 n 的矩阵)
Z1 为弹核的质子数;
A1 为弹核的质量数;
Z2 为靶核的质子数;
A2 为靶核的质量数;
E 为弹核入射时的能量。

求解结果



100
10
1
0.1
0.01
0.001
0
50
100
150
20
θ c.m. (deg)
dσ/dσ_R
p+Al27 E=6.54MeV
experiments
kd02 without spin orbital(diffcs)
kd02 without spin orbital(fresco)



1
0.1
0.01
0.001
0
50
100
150
θ c.m. (deg)
dσ/dσ_R
p+Pb208 E=35.00MeV
diffcs
experiments
fresco