Quantum computer: the circuit model

1. n qubits的Hilbert空间，由n个0、1两个态的量子态做tensor product得到。

   作用于较少量子比特的门为easy（如量子门），而作用于多个比特的（随n增长 作用的比特增多　的）操作为hard。

2. 初始化 $|0000\dots\rangle$
3. 有限数目个通用基本量子门
4. 量子电路的搭建可以由经典计算机完成
5. 结果读出的方法是，测量σ_z，即投影到 $|0\rangle, |1\rangle$

Qubit

$$\dim(\mathcal{H}) = 2, \quad \mathcal{H} = \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$$

也记作

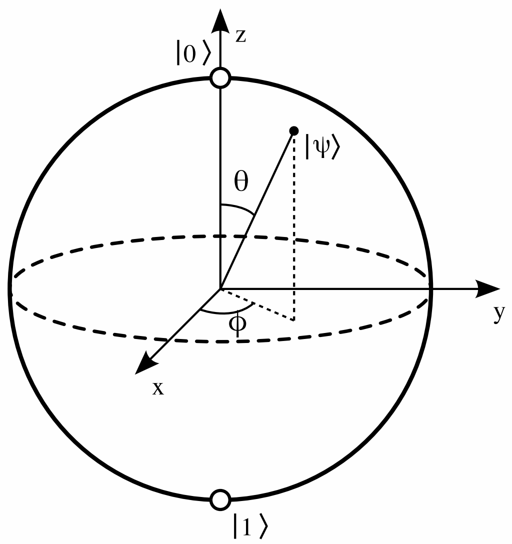
$$\mathcal{H} = \text{span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pauli operators:

$$X = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$Z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bloch sphere



1. 任何一个态，可以表示成如下，同时定义了ϕ, θ

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi/2}\sin(\theta/2)|1\rangle$$

2. Pauli 矩阵作用在一个任意的单个的态上如下，以及特性：期望值是Bloch球中极坐标下单位向量在x, y, z 的投影

$$\sigma|\psi\rangle$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ib\\ia\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_1\rangle=\begin{pmatrix}a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\frac{e^{-i\phi}+e^{i\phi}}{2}\sin{(\theta)}=\sin\theta\cos\phi$$

$$\langle\sigma_2\rangle=\begin{pmatrix}a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-ib\\ia\end{pmatrix}=\sin\theta\sin\phi$$

$$\langle\sigma_3\rangle=\begin{pmatrix}a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=\cos\theta$$

3. $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ 算符，是对应量子态的本征算符，且本征值为1

$$\hat{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)=(\langle\sigma_1\rangle,\langle\sigma_2\rangle,\langle\sigma_3\rangle)$$

$$\hat{n}\cdot\vec{\sigma}=n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi}\\\sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi}\\\sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)\\e^{i\phi/2}\sin(\theta/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)\\e^{i\phi/2}\sin(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\hat{n}\cdot\vec{\sigma}|\psi\rangle=|\psi\rangle$$

4. （引入Density Operator之后）对密度矩阵，来查看一些性质

对于一个A中的pure state，对角化之后对角线上只有一个非零元素

$$\rho_A = \mathbf{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* & ab^* \\ a^*b & bb^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{e^{-i\phi}\sin\theta}{2} \\ \frac{e^{i\phi}\sin\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{I} + \hat{n}\cdot\vec{\sigma}\right]$$

对于一个A中的mixed state，对角化之后对角线上多于一个非零元素

$$\text{e.g.}\quad \rho = \frac{1}{2}\rho(|0\rangle) + \frac{1}{2}\rho(|1\rangle) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

总结：Bloch Sphere纯态在球面，混态在球内；球中矢量的加法对应密度矩阵的加法。

Tensor Product

$$\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle : 1 \le i \le k, 1 \le j \le l\}$$

$$\text{space: } V \otimes W$$

$$\text{element: } \sum_{ij} \alpha_{ij} \left(|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle\right)$$

内积

$$(|v_1\rangle \otimes |w_1\rangle, |v_2\rangle \otimes |w_2\rangle) = (|v_1\rangle, |v_2\rangle) \cdot (|w_1\rangle, |w_2\rangle)$$

A general state of Alice & Bob

密度算符的引入

任意一个二元状态：

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle, \text{ where } \sum_{j,\mu} |a_{i\mu}|^2 = 1$$

二元纯态的施密特分解