# 题目 3

薄纪铮

2023.2.28

# 硬球散射

- 势 $V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$
- 首先计算被硬球势散射的相移
- 因为球内部势趋于 $\infty$，所以显然有 $u_l(kr) = 0 \quad (r \leq a)$，即波函数只在球势外
- 所以给出外部的波函数 ($V = 0$ 的部分) 形式

$$u_l(kr) = AG_l(kr) + BF_l(kr) = e^{i\delta_l}[sin\delta_l G_l(kr) + cos\delta_l F_l(kr)]$$

$$u_l(kr) = e^{i\delta_l} sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

- 并令 $u_l(ka) = 0$，有 $\delta_l = l\pi/2 - ka$，这就是相移情况

# 硬球散射

- 计算当对于粒子的入射能量为 $E = \frac{\hbar k^2}{2m}$ 的总截面（要求一直取到极限 $k \to \infty$），即对所有的 $l$ 求和

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) sin^2 \delta_l, (\eta_l = 1)$$

- 因为 $k$ 上限趋于无穷，所以要考虑很大的 $l$，所以求和可以变积分

$$\sigma = \sum_{l=0}^{l=ka} \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} \int_0^{ka} dl (2l+1) sin^2 \delta_l$$

- 代入 $\delta_l$ 的具体形式（前面已经算出）得到截面的解析形式

# 硬球散射

$$\sigma = \frac{2}{k^2\pi}(2cos2ka - 2cos(\pi - 2)ka + \pi(ka(1 + ka)\pi - sin2ka - (1 + 2ka)sin(\pi - 2)ka))$$

- 由于 $a$ 是常数，且 $k \to \infty$，所以对上式取极限得到

$$\sigma_t \simeq 2\pi a^2$$

# 球势阱的散射

- 两个质量为 $m$ 的粒子，它们之间有一个吸引的势 ($V_0$ 是正数)，为球型势阱

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

- 先计算散射长度 $a_0$

# 球势阱的散射

- 因为低能情况下的散射长度近似为 $a_0 \to \frac{1}{k} tan\delta_0$ ，所以该问题转化成算相移 $tan\delta_0$
- 先写出内部和外部的 $Schrödinger$ 方程（取低能情况 $l = 0$）

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u^{(}r)}{dr^2} - V_0 u(r) = Eu(r) \quad r < b$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2} = Eu(r) \quad r > b$$

# 球势阱的散射

- 解出

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r) = Asin(k_1 r) & r < b \\ u_2(r) = Bsin(k_2 r + \delta_0) & r > b \end{cases}$$

- 其中 $k_1^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$，以及 $k_2^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$。
- 再使用连续性条件：$u_1(b) = u_2(b), u_1'(b) = u_2'(b)$，有

$$\frac{u_2(r)}{u_2'(r)} = \frac{u_1(r)}{u_1'(r)} \to \frac{tan(k_2 b + \delta_0)}{k_2} = \frac{tan(k_1 b)}{k_1}$$

- 就可以解出相移

$$tan\delta_0 = \frac{k_2 tan(k_1 b) - k_1 tan(k_2 b)}{k_1 + k_2 tan(k_1 b) tan(k_2 b)}$$

# 球势阱的散射

- 用 $V_0$ 的级数展开散射长度 $a_0(Born$ 近似下)
- 因为 $a_0 = \frac{1}{k}tan\delta_0$，所以对 $a_0$ 的展开就是对相移的展开
- 由于散射振幅是相移的函数，所以问题转化成计算 $Born$ 近似下的散射振幅

# 球势阱的散射

- 图像

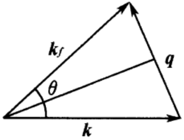


Figure: 散射过程中的动量转移

- $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}$，且 $q = 2ksin\frac{\theta}{2}$
- 在 $Born$ 近似下，得到散射振幅 $f(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q}\int_0^\infty r'V(r')sin(qr')dr'$

# 球势阱的散射

- 这里利用一个公式

$$\frac{sin(qr)}{qr} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)j_l^2(kr)P_l(cos\theta)$$

- 将它代入到 $f(\theta)$ 的表达式得

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(cos\theta)\int_0^{\infty}U(r)j_l^2(kr)r^2dr$$

- 和一般性的 $f(\theta)$ 形式 $f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(cos\theta)\frac{e^{i\delta_l}sin\delta_l}{k}$ 对比得到相移的部分

$$\frac{e^{i\delta_l}sin\delta_l}{k} = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^{\infty}U(r)j_l^2(kr)r^2dr$$

# 球势阱的散射

- 从而给出相移

$$tan\delta_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2 k}\int_0^b j_0^2(kr)k^2r^2dr$$

- 该式表明：当 $V_0$ 很大（势阱很深足够形成束缚态时），上面的 *Born* 近似 (*series*) 就发散了。

Thank you!