§.L2. Density Operators

一. Closed quantum Systems.

③ 组成: 系统及其环境.

环境是不可观测的.

规则: (1) 态: 希尔伯特空间中的射线.

① $|\psi\rangle \in H$. $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \in C$

② $1 = \||\psi\|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

③ $|\psi\rangle \equiv \lambda|\psi\rangle$. $\lambda \in C$. $\lambda \neq 0$. 单独改变相位~~有~~没有意义.

④ $a|\phi\rangle + b|\psi\rangle \neq a|\phi\rangle + be^{i\alpha}|\psi\rangle$.

两个态叠加时. 改变相位有意义

(2) 可观测量是H空间中的一个自伴算子.

$A: H \to H$. $A = A^+$. $\langle\phi|A|\psi\rangle = \langle A^+\phi|\psi\rangle$.

对角化: $A = \sum_n a_n E_n$. $a_n \in R$.

$E_n E_m = \delta_{mn} E_n$, $E_n = E_n^+$.

$a_n \to$ 特征值. E_n: 去a_n方向的投影.
正交

(3) 测量结果的概率符合玻恩规则:

过去态 $|\psi\rangle$. $\to$ $\dfrac{E_n|\psi\rangle}{\|E_n|\psi\rangle\|}$.

$Prob(a_n) = \|E_n|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|E_n|\psi\rangle$.

$E_n|\psi\rangle \cdot E_n|\psi\rangle$

$= (E_n|\psi\rangle)^* (E_n^+\langle\psi|)$

$= \cancel{\langle\psi|E_n|\psi\rangle}$

$E_n E_n = \delta_{nn} E_n$

$\delta_{mn} E_m . E_n$.

第二次测量, 结果仍相同.

测量结果的期望值: $\langle A\rangle = \sum_n a_n Prob(a_n) = \langle\psi|A|\psi\rangle$.

$e^{-\frac{iH(t_1-t_0)}{\hbar}}$

(4) 时间演化由薛定谔方程决定. $\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH(t)|\psi(t)\rangle$.

时间演化算符.

两边积分: $\dfrac{|\psi(t+dt)\rangle}{|\psi(t)\rangle} = e^{-iH(t)dt}$

$H(t)$ 是一个自伴算子, 可能依赖于时间.

时间演化通过一系列无穷小的幺算子进行. 系数不重要.

$|\psi(t+dt)\rangle = (I - iH(t)dt)|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t)dt}|\psi(t)\rangle$

哈密顿算符: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r,t)$ $\quad$ $e^{-iH(t)dt}$

$= U(t+dt, t)|\psi(t)\rangle$.

$\hat{H}\psi(t) = i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}$

酉正变换.

(5) 复合系统AB的 Hilbert 空间是 A.B的张量积.

$H_{AB} = H_A \otimes H_B$. 对于d_A. d_B维的 A.B系统, 正交基 $\{|i\rangle_A \otimes |b\rangle_B\}$.

$\dim(H)=2$. $H=\mathrm{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Pauli 算子: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$\{I, X, Y, Z\}$.

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$.

$a=\cos\theta e^{i\delta}$
$b=\sin\theta e^{i(\delta+\phi)}$

4个参数: ~~a b θ φ~~ a.b. 两实部两虚部

$|a|^2+|b|^2=1$

取消一个整体相位.

只剩2个参数.

→ 只用 θ, φ 可以描述一个qubit状态.

测量 σ_3: ~~Prob~~ $\mathrm{Prob}(|0\rangle)=|a|^2$. $\mathrm{Prob}(|1\rangle)=|b|^2$

$|a|^2+|b|^2=1$

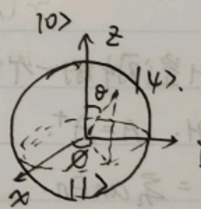
共同相位可忽略.

无穷多种叠加方式.

Qubit. 另写法. $\cos(\frac{1}{2}\theta)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$.

$|\psi(\theta,\phi)\rangle = e^{-i\phi/2}\cos(\frac{1}{2}\theta)|0\rangle + e^{i\phi/2}\sin(\theta/2)|1\rangle$.

$\theta\in[0,\pi]$. $\phi\in[0,2\pi)$



$\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$

$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

$\hat{n}=(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ 任一纯态对应一个点.

$\hat{n}\cdot\vec{\sigma}=n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3 \Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{\sigma}|\psi(\theta,\phi)\rangle = |\psi(\theta,\phi)\rangle$

期望: $\langle\sigma_1\rangle=\sin\theta\cos\phi$ $\langle\sigma_2\rangle=\sin\theta\sin\phi$ $\langle\sigma_3\rangle=$ ~~sinθ~~ $\cos\theta$ ⇓ 推出.

Quantum Interference:

$|\psi(\theta,\phi)\rangle = e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)|\uparrow\rangle_z + e^{i\phi/2}\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle_z$.

$|\uparrow\rangle=|0\rangle$. $|\downarrow\rangle=|1\rangle$

相位很重要,特征态不是简单叠加,它们之间会有干扰.

$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle)$

相对 ① 电子自旋上旋 ↔ 正电子自旋为下旋 ~~无法预测~~ ② 电子自旋为下旋 ↔ 正电子自旋为上旋

不能预测是哪一组,
但可以预测50%概率.

Open Quantum Systems.

与环境相互作用的系统. (环境是不可观测的)

① 态不是H空间的射线 ② 测量量不是正交投影 ③ 演化不是幺正的.

Closed 系统时.
$\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$. 纯态.
$(\rho=\sum_i p_i\rho_i \to$ 混态$)$

AB 量复合: 是两个H空间A B的张量积.

$|\psi\rangle_{AB}=a|0\rangle_A\otimes|0\rangle_B + b|1\rangle_A\otimes|1\rangle_B = a|00\rangle+b|11\rangle$.

可观测量为 $I_A\otimes Z_B$ (系统B以Z为基准测量).

$|0\rangle_A\otimes|0\rangle_B$ $\mathrm{Prob}_0=|a|^2$

$|1\rangle_A\otimes|1\rangle_B$ $\mathrm{Prob}=|b|^2$.

测量后的状态是A.B的相关状态. 如果我们观察A, 那么 $\mathrm{Prob}(|0\rangle_A)=|a|^2$
$\mathrm{Prob}(|1\rangle_A)=|b|^2$.

考虑一个在A系统的厄米算子: 注: 关系: 只能测A. → M_A.

B只能投影到z. $I_A\otimes z_B$.

$A = M_A\otimes I_B$

$_{AB}\langle\psi|M_A\otimes I_B|\psi\rangle_{AB} = (a^*\langle 00| + b^*\langle 11|)\, M_A\otimes I_B\,(a|00\rangle + b|11\rangle)$

$= |a|^2\langle 0|M_A|0\rangle + |b|^2\langle 1|M_A|1\rangle$.

推导: $= a^*\langle 00|(M_A\otimes I_B)\,a|00\rangle + b^*\langle 11|(M_A\otimes I_B)\,b|11\rangle$

~~$|a|^2$~~ (其余由于同~~向~~ 张量积=0)

$= |a|^2\langle 0|M_A|0\rangle + |b|^2\langle 1|M_A|1\rangle$

$M_A\otimes I_B$的期望.

$_{AB}\langle\psi|M_A\otimes I_B|\psi\rangle_{AB} = tr(M_A\rho_A)$

$\rho_A = |a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2|1\rangle\langle 1| = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$

$M_A\rho_A =$ ~~$|a|^2|0\rangle\langle 0|\cdot M_A + |b|^2$~~

$|a|^2\cdot M_A|0\rangle\langle 0| + |b|^2 M_A|1\rangle\langle 1|$.

$tr(M_A\rho_A) = |a|^2\langle 0|M_A|0\rangle + |b|^2\langle 1|M_A|1\rangle$.

$$\begin{matrix} |a|^2\langle 0|M_A|0\rangle & |a||b|\langle 0|M_A|1\rangle \\ |a||b|\langle 1|M_A|0\rangle & |b|^2\langle 1|M_A|1\rangle \end{matrix}$$

对角线: $tr(M_A\rho_A)$

ρ_A: 密度算子:

① Bob在z基上测量了B.

prob $|0\rangle$ → $|a|^2$ prob $|1\rangle$ → $|b|^2$. $|\psi\rangle_{AB}$.

② 无论Alice在A系统中测量了什么, 她都无法区分在复合系统AB联合状态下测量, 与在A单独的可能状态下测量之间的区别

ρ_A对Alice对A进行任何可能测量时结果的概率分布进行编码.

→ 提供系统A的完整物理描述.

eg. $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt2}(|00\rangle + |11\rangle)$

$\rho_A = \frac12(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac12 I$ ☆ $(a=\frac{1}{\sqrt2}\ \ b=\frac{1}{\sqrt2})$

$tr(\vec\sigma\cdot\hat n)\rho_A = 0$. 向上、向下自旋的概率均为$\frac12$.

A中更一般的情况: $A = M_A\otimes I_B$.

$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu}|i\rangle_A\otimes|\mu\rangle_B$. $\sum_{i\mu}|a_{i\mu}|^2 = 1$ $_B\langle\mu|i,\nu\rangle_{AB} = \delta_{\mu\nu}|i\rangle_A$

$_{AB}\langle\psi|M_A\otimes I_B|\psi\rangle_{AB} = \sum_{j,\nu} a_{j\nu}^*(_A\langle j|\otimes {_B\langle\nu|})(M_A\otimes I_B)\sum_{i\mu}a_{i\mu}(|i\rangle_A\otimes|\mu\rangle_B)$

$= \sum_{j,\nu} a_{j\nu}^*\sum_{i\mu}a_{i\mu}\langle j|M_A|i\rangle_{\cancel{A}B}$.

$_B\langle\nu|$. $|\mu\rangle_B$ 都是为了投影到B上

$= \sum_{j\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu}\langle j|M_A|i\rangle$.

~~......~~ ν,μ不相等

$_{AB}\langle\psi| M_A\otimes I_B|\psi\rangle_{AB} = tr(\rho_A M_A)$

$\rho_A = \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} |i\rangle\langle j| = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$

$_B\langle\mu|: H_{AB}\to H_A$. $|\mu\rangle_B: H_{AB}^* \to H_A^*$.

$_B\langle\mu|i,\nu\rangle_{AB} = \delta_{\mu\nu}|i\rangle_A$ $\quad {}_{AB}\langle i,\nu|\mu\rangle_B = \delta_{\mu\nu}\, {}_A\langle i|$

对 j,μ

$\nu=\mu$ 时 $= {}_A\langle i|$

$\mu\neq\nu$ 时 $=0$.

$_A\langle j|\otimes[M_A\otimes I_B)\delta_{\mu\nu}|i\rangle_A]$

$\mu=\nu$ 时有意义

$_A\langle j|M_A|i\rangle_A$

$\sum_{j,\nu} a_{j\nu}^*({}_A\langle j|\otimes {}_B\langle\nu|)(M_A\otimes I_B)(\sum_{i,\mu} a_{i\mu}(|i\rangle_A\otimes|\mu\rangle_B)$

$=\sum_{i,j,\mu,\nu} a_{j\mu}^* a_{i\mu}[\langle j|M_A|\delta_{\mu\nu}|i\rangle_B]$

$=\sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu}[\langle j|M_A|i\rangle_B]$ ✓

$tr_B(M_{AB}) = \sum_\mu {}_B\langle\mu|M_{AB}|\mu\rangle_B$

$\rho_A = \sum_\mu {}_B\langle\mu|\psi\rangle\langle\psi|\mu\rangle_B$

ρ_A 的性质:

$\rho_A = \sum_{i,j,\mu} a_{i\mu}^* a_{j\mu}|i\rangle\langle j| \equiv tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$

$(|\psi\rangle_{AB} = \sum a_{i\mu}|i,\mu\rangle_{AB})$

① $\rho=\rho^+$ (厄米的)

② 正定的. $\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu}\langle\phi|i\rangle\langle j|\phi\rangle$

$=\sum_\mu|\sum_i a_{i\mu}\langle\phi|i\rangle|^2\geq 0$.

③ 单位迹 $tr\rho = \sum|a_{i\mu}|^2 = \||\psi\rangle_{AB}\|^2=1$

⇒ 存在一个正交基,其中密度算子是对角的,特征值为非负实数.

$\rho=\sum_a P_a|a\rangle\langle a|$. $P_a\geq 0$. $\sum_a P_a=1$

本征值是系统A中相应基态的概率.

若只有一个非零本征值,则称A为纯态,否则为混态.

Schmit decomposition 施密特分解:

ρ_A 是对角化的. 两体系统中的一个叠加态

$|\psi\rangle_{AB} = \sum a_{i\mu}|i\rangle_A\otimes|\mu\rangle_B$. $\quad \rho_A = \sum_i P_i|i\rangle\langle i|$

$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i |i\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B$

$|\tilde{i}\rangle_B = \sum_u a_{iu}|u\rangle_B$. (无需正交/对角化)

$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i,j} (|i\rangle\langle j|)_A \, tr_B(|\tilde{i}\rangle\langle\tilde{j}|) = \sum_{i,j}(|i\rangle\langle j|)_A \, tr_B(|\tilde{j}'\rangle\langle\tilde{j}'|\tilde{i}\rangle\langle\tilde{j}|)$

$= \sum_{i,j} (|i\rangle\langle j|)_A \langle\tilde{j}|\tilde{i}\rangle$

$= \sum_{i,j} (|i\rangle\langle j|)_A \langle\tilde{j}'|\tilde{i}\rangle \, tr_B(|\tilde{j}'\rangle\langle\tilde{j}|)$

$= \langle\tilde{j}|\tilde{i}\rangle$

(引入$\tilde{j}-\delta_{jj'}$)

$\because \langle\tilde{j}|\tilde{i}\rangle = \delta_{ij} p_i$. $i=j$时 $\langle\tilde{i}|\tilde{i}\rangle = p_i$.

$\rightarrow |i'\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{p_i}}|\tilde{i}\rangle_B$. 正交向量 → 正交化 $\||i'\rangle\| = \sqrt{\lambda_n}$.

$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}|i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B$. ⇔

$\sqrt{p_i}$: Schmidt 系数.

将A.B的纠缠程度量化.

☆ 将一个复合系统分成 A.B子空间.

则复合系统的态矢,可以用这两个子空间的基矢展开.

$|\psi\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n}|a_n\rangle|b_n\rangle$.

其中$\{|a_n\rangle\}$ $\{|b_n\rangle\}$分别为 A.B空间的 ρ_A. ρ_B的本征矢量

都对应本征值$\{\lambda_n\}$

对B的 ~~$\sum$~~ $\rho_B = tr_A(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i p_i |i'\rangle\langle i'|$.

($p_i = p_i$ 同一个值)

ρ_A. ρ_B 具有相同的非0特征值.

这两个子系统的维数不一定相同. → 零特征值数可能不同.

~~Smit~~ Schmit 秩: 非零项数量. (和ρ_A. ρ_B的秩相同)

若AB. $=1$. 则态为~~单~~"乘积状态".

A.B的边缘态=纯态.

$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$.

若AB的Schmit秩大于1. 则AB是混态(纠缠态)

不可能在A.B之间发送经典的信息↑或执行局部操作(作用于A.B的幺正变换)

来增加Schmit秩.

$\sum_i \lambda_i |i_A\rangle|i_B\rangle \rightarrow |\psi\rangle$.

$\sum \lambda_i (U_i|i_A\rangle|i_B\rangle) \rightarrow U|\psi\rangle$.

不改变λ_i

产生A.B纠缠的唯一方法是联合作用于A.B的操作/A.B之间发送量子态.

ρ_A的性质: $\rho_A = \sum_{i,j,u} a_{iu}^* a_{ju} |i\rangle\langle j| \equiv tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$

$|\psi\rangle_{AB} = \sum a_{iu}|i,u\rangle_{AB}$.

① 厄米的: $\rho = \rho^+$. ② 正定的: $\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \sum_{i,j,u} a_{ju}^* a_{iu} \langle\phi|i\rangle\langle j|\phi\rangle = \sum_u |\sum_i a_{iu}\langle\phi|i\rangle|^2 \geq 0$

~~性质~~ ③单位迹：$tr\rho = \sum|a_{i\mu}|^2 = \||\psi\rangle_{AB}\|^2 = 1$

An ensemble：存在一个正交基，其中密度 ρ_A 是对角的。

~~由~~ ρ_A 的特征值和为1，且非负。

$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ $(p_i \geq 0)$ ~~实且~~

$\sum_i p_i = 1$

$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\, |i'\rangle_A \otimes |i'\rangle_B$. $\{|i'\rangle_A\}$, $\{|i'\rangle_B\}$ 是正交基.

~~A-B与~~ ρ_A, ρ_B 具有相同的非0特征值.

凸集合：对于集合内每一对点，连接其的线段也在该集合内.

ρ 的集合是凸集.

$\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$. $(0 \leq \lambda \leq 1)$

②性质

$\langle\psi|\rho(\lambda)|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\rho_1|\psi\rangle + (1-\lambda)\langle\psi|\rho_2|\psi\rangle \geq 0 \to \rho(\lambda)$ 也是密度算符.

+ ①③性质

$\langle M\rangle = \lambda\, tr(\rho_1 M) + (1-\lambda)\, tr(\rho_2 M) = tr(\rho(\lambda) M)$

以指定概率测

对Alice选择测量的任何数据，她都无法区分状态 $\rho(\lambda)$ 和 ρ_1, ρ_2 的区别.

对于给定的混态，有很多种表示方式.

但对于纯态，只有一种.

反证：$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$. 且 $|\psi^\perp\rangle\langle\psi| = 0$.

$0 = \langle\psi^\perp|\rho|\psi^\perp\rangle = \lambda\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle + (1-\lambda)\langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle$.

$\Rightarrow \langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle = 0$. 且 $\langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle = 0$.

$\therefore \rho_1, \rho_2 \in |\psi\rangle\langle\psi|$ (其实和 ρ 是一种态)

ρ 是纯态时不能用其他两种态的线性组合表示.

(2维的)

给出一个表达式 $\rho(\vec{P}) = \frac{1}{2}(I + \vec{P}\cdot\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1-P_3 \end{pmatrix}$

满足①③性质（单位迹）

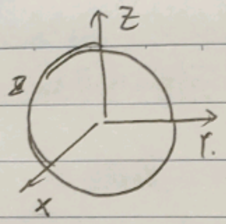
要使其为密度算符. $\det\rho(\vec{P}) = \frac{1}{4}(1-\vec{P}^2) \geq 0 \Rightarrow |\vec{P}| \leq 1$

(要让特征值均 ≥ 0)

在一个球面上.

$\Rightarrow$ 可能的 $\rho(\vec{P})$ 对应三维空间中的球.

球



球面上的点：特征值为0/1.

纯态.

$\rho(\hat{n}) = \frac{1}{2}(I+\hat{n}\cdot\vec{\sigma})$

$(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$ （见第2页）

$(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\cdot\rho(\hat{n}) = \frac{1}{2}(I\cdot(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})+I)$

$= \frac{1}{2}(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}+I) = \rho(\hat{n})$

$\Rightarrow \rho(\hat{n}) = \rho(\hat{n})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})$

$\hat{n}\cdot\vec{\sigma}|\psi(\theta,\varnothing)\rangle = |\psi(\theta,\varnothing)\rangle$

$\rho(\hat{n}) = |\psi(\theta,\varnothing)\rangle\langle\psi(\theta,\varnothing)|$

$\mathrm{tr}\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij} \Rightarrow \langle\hat{n},\vec{\sigma}\rangle = \mathrm{tr}(\rho(\vec{p})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}))$

$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mathrm{tr}[n_i\sigma_i(I+p_j\sigma_j)]$

$(i=j$ 时 $\underset{\mathrm{tr}}{n_i\sigma_i p_j\sigma_j} = 2n_ip_i)$ $\quad (n_i\sigma_i\cdot I=0)$ (正交)

$\Rightarrow \langle\hat{n},\vec{\sigma}\rangle = \sum_i n_ip_i$

$\Rightarrow = \vec{n}\cdot\vec{p}$

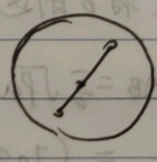
$\therefore \langle\hat{n},\vec{\sigma}\rangle = \hat{n}\cdot\vec{p}$ （极坐标化？）

$\rho(\vec{p}) = \frac{1}{2}(I+\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \Rightarrow \mathrm{tr}\,\rho(\vec{p})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \hat{n}\cdot\vec{p}$

混态 → 两个纯态的凸组合，可用多种方式表示.

→ 但只有一种方式 → 可表为两个相互正交的纯态.

确定方法：过该点直径的两端



例外：球心（无穷对）

↓ 最大混合态.

拓展维度：$d=2$ 时. 球边界上都是纯态.

$d=3$ 时.

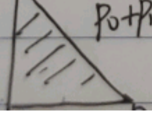
$\rho = \sum_i p_i|i\rangle\langle i|$

$= p_0|0\rangle\langle 0| + p_1|1\rangle\langle 1| + p_2|2\rangle\langle 2|$

$p_0=0$ 时边界，但除非 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$. 否则不是极值.

位于

p_1.



$p_0+p_1=0$.

经典的 d 维概率分布有 d 个极值点，极值分布 → 结果的 Prob=1 的分布.

所有分布都是这些分布的凸组合.

ρ_A — ρ → 表示成纯态的凸组合 → ∞多种（不一定正交）

正交：只有一种. ↓

$$\rho_A = \sum_a p_a |\phi_a\rangle\langle\phi_a| = \sum_u q_u |\psi_u\rangle\langle\psi_u|$$

↓

如果在Bob系统B中引入一个正交基（ρ_A），可以提纯化这些ρ.

$\rho_{AB}=\rho_A\otimes\rho_B$.

→ ~~在A上~~ 用边缘密度算符求A·B的二分纯态.

$|\phi_1\rangle_{AB} = \sum_a \sqrt{p_a}\,|\phi_a\rangle_A\otimes|\alpha_a\rangle_B$. 两体纯态

$|\phi_2\rangle_{AB} = \sum_u \sqrt{q_u}\,|\psi_u\rangle_A\otimes|\beta_u\rangle_B$

Bob可以测对$|\alpha\rangle$的第一个态 $|\phi_1\rangle_{AB}$ → ϕ系综.

$|\beta\rangle$ …… $|\phi_2\rangle_{AB}$ → ψ系综.

单一的纯化方式.

ρ_A的$|\phi\rangle$. $|\psi\rangle$如何关联：

(2)

Bob对系统B单独应用幺正变换，使 $|\phi_1\rangle_{AB} \to |\phi_2\rangle_{AB}$ → 有一个一一对应的纯化

⇒ Bob可以通过选定的测量实现任一个系综.（HJW定理）

（前提：ρ_A：对角的、+ Schmidt 分解）

$|\phi_1\rangle_{AB} = \sum_k \sqrt{\lambda_k}\,|k\rangle_A\otimes|k_1'\rangle_B$.

$|\phi_2\rangle_{AB} = \sum_k \sqrt{\lambda_k}\,|k\rangle_A\otimes|k_2'\rangle_B$.

幺正变换U将B的这两个正交基联系起来：

~~1-基B~~ $|\phi_1\rangle_{AB} = \sum_a\sqrt{p_a}\,|\phi_a\rangle_A\otimes|\alpha_a\rangle_B$.

$= (I_A\otimes U_B)|\phi_2\rangle_{AB}$.

（幺正变换）$U_B|\beta_u\rangle_B = |\alpha_u\rangle_B$

$= \sum_u\sqrt{q_u}\,|\psi_u\rangle_A\otimes U_B|\beta_u\rangle_B = \sum_u \sqrt{q_u}\,|\psi_u\rangle_A\otimes|\alpha_u\rangle_B$.

~~还存在一个~~

$= \sum_a \sqrt{p_a}\,|\phi_a\rangle_A\otimes|\alpha_a\rangle_B$

还存在一个和α、γ基有关的幺正变换V:

$= \sum_a\left(\sum_u \sqrt{q_u}\,|\psi_u\rangle_A V_{au}\otimes \sum|\alpha_a\rangle_B\right)$

$\sum_a\sqrt{p_a}\,|\phi_a\rangle_A\otimes\sum|\alpha_a\rangle_B = \sum_u\sqrt{q_u}\,|\psi_u\rangle_A\otimes\sum_a|\alpha_a\rangle_B V_{au}$

① ②

①② ⇒ $\sqrt{p_a}\,|\phi_a\rangle = \sum_u\sqrt{q_u}\,|\psi_u\rangle_A V_{au}$.

同一ρ_A的两个不同系综表示 → 关联.

$|\phi\rangle$. $|\psi\rangle$.