Homework III Answers

1 1.Scattering from a Spherical Square Well

Tow particles of mass scatter.The potential between them is approximated by an attractive square well:

$$V(r)=\begin{cases} -V_0 & r<b \\ 0 & r>b \end{cases} \tag{1}$$

whereV_0 is a positive number.

Answer(a):

calculate the total cross section for the low-energy scattering.

1.计算$r<b$时的波函数,在质心系下两体散射的薛定谔方程为:

$$[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2+V(r)]\varphi_1(\vec{r})=E\varphi_1(\vec{r})$$

此问题关于z轴对称，且入射方向即为z轴方向，假设波函数的表达式为:

$$\varphi_1(\vec{r})=\sum_l C_l R_l(r)P_l(\cos(\theta))$$

将薛定谔方程用球坐标表示，将波函数表达式带入到薛定谔方程:

$$[\frac{-\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+V(r)]\varphi_1(\vec{r})=E\varphi_1(\vec{r})$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R_l(r)}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R_l(r)}{\mathrm{d}r}+[k'^2r^2-l(l+1)]R_l(r)=0 \tag{2}$$

上述方程(2)是球贝塞尔方程，其中$k'^2=k_0^2+k^2, k_0^2=\frac{2mV_0}{\hbar^2}, k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$，其解为球贝塞尔函数$j_i$和$n_l$。但是在$r=0$处波函数的值应该是有限的，故舍去$n_l$这个解。可得波函数表达式为:

$$\varphi_1(\vec{r})=\sum_l C_l j_l(k'r)P_l(\cos\theta) \tag{3}$$

2.计算$r>b$时的波函数，薛定谔方程为:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\varphi_2(\vec{r})=E\varphi_2(\vec{r})$$

同理设波函数的表达式为:

$$\varphi_2(\vec{r})=\sum_l B_l A_l(r)P_l(\cos(\theta))$$

薛定谔方程用球坐标表示，把波函数带入可薛定谔方程:

$$[\frac{-\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}]\varphi_2(\vec{r})=E\varphi_2(\vec{r})$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2A_l(r)}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}A_l(r)}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]A_l(r)=0 \tag{4}$$

方程(4)仍然是一个球贝塞尔方程，其中$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$,其解为球贝塞尔函数$j_l(kr)$和$n_l(kr)$,故可得径向波函数A_l的表达式为：

$$A_l(r)=C_l^{(1)}j_l(kr)+C_l^{(2)}n_l(kr)$$

波函数表达式为：

$$\varphi_2(\vec{r})=\sum_l[C_l^{(1)}j_l(kr)+C_l^{(2)}n_l(kr)]P_l(\cos\theta) \tag{5}$$

当$kr\to+\infty$

$$j_l(kr)=\frac{\sin(kr-\frac{l\pi}{2})}{kr}$$

$$n_l(kr)=-\frac{\cos(kr-\frac{l\pi}{2})}{kr}$$

将$kr\to+\infty$时，$j_l(kr),n_l(kr)$的表达式带入到(5)表达式可，然后用指数的形式展开，就可以得到$kr\to+\infty$时的波函数：

$$\varphi(\vec{r})=\sum_l\frac{P_l(\cos\theta)}{2ikr}[(C_l^{(1)}-iC_l^{(2)})e^{-i\frac{l\pi}{2}}e^{ikr}-(C_l^{(1)}+iC_l^{(2)})e^{i\frac{l\pi}{2}}e^{-ikr}] \tag{6}$$

已知末态波函数在$kr\to+\infty$表达式为:(在证明光学定理时，已经证明过了，这里不再赘述)

$$\varphi(\vec{r})=\sum_l\frac{P_l(\cos\theta)}{2ikr}[e^{2i\delta_l}e^{ikr}-e^{il\pi}e^{-ikr}] \tag{7}$$

比较(6),(7)两式，使径向波函数的$e^{ikr},e{-}ikr$,系数对应相等可得$C_l^{(1)},C_l^{(2)}$的表达式为：

$$C_l^{(1)}=(2l+1)i^le^{i\delta_l}\cos\delta_l$$

$$C_l^{(2)}=-(2l+1)i^le^{i\delta_l}\sin\delta_l$$

由此可得波函数$\varphi_2(\vec{r})$的表达式为：

$$\varphi_2(\vec{r})=\sum_l(2l+1)i^le^{i\delta_l}[\cos\delta_lj_l(kr)-\sin\delta_ln_l(kr)] \tag{8}$$

3.由此分别计算出$r<b$时的径向波函数和$r>b$时的径向波函数：

$$R_l(r)\propto j_l(k^{'}r)$$

$$A_l(r)\propto\cos\delta_lj_l(kr)-\sin\delta_ln_l(kr)$$

在$r=b$时，根据波函数的连续性可得：

$$R_l(b)=A_l(b)$$

$$R_l^{'}(b)=A_l^{'}(b)$$

$$\frac{R_l^{'}(b)}{R_l(b)}=\frac{A_l^{'}(b)}{A_l(b)}$$

故得下列表达式：

$$\frac{k^{'}j_l^{'}(k^{'}b)}{j_l(k^{'}b)}=k\frac{\cos\delta_l j_l^{'}(kb)-\sin\delta_l n_l^{'}(kb)}{\cos\delta_l j_l(kb)-\sin\delta_l n_l(kb)} \tag{9}$$

令$\frac{j_l^{'}(k^{'}b)}{j_l(k^{'}b)}=\beta_l$上术表达式简化为：

$$\beta_l k^{'}=k\frac{\cos\delta_l j_l^{'}(kb)-\sin\delta_l n_l^{'}(kb)}{\cos\delta_l j_l(kb)-\sin\delta_l n_l(kb)}$$

$$\beta_l\frac{k^{'}}{k}=\frac{\cos\delta_l j_l^{'}(kb)-\sin\delta_l n_l^{'}(kb)}{\cos\delta_l j_l(kb)-\sin\delta_l n_l(kb)}$$

令$\beta_l\frac{k^{'}}{k}=\alpha$,解得相移表达式为：

$$\tan\delta_l=\frac{\alpha j_l(kb)-j_l^{'}(kb)}{\alpha n_l(kb)-n_l^{'}(kb)} \tag{10}$$

值得注意的是，这里的$j^{'}, n^{'}$但是将括号里的字母作为一个整体求导的，当$k\to 0$时，$kb\to 0$有：

$$\lim_{x\to 0} j_l(x)=\frac{x^l}{(2l+1)!!}$$

$$\lim_{x\to 0} n_l(x)=-\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}$$

它们的导数对应为:

$$\lim_{x\to 0} j_l^{'}(x)=l\frac{x^{l-1}}{(2l+1)!!}$$

$$\lim_{x\to 0} n_l^{'}(x)=(l+1)\frac{(2l-1)!!}{x^{l+2}}$$

将$x\to 0$时的$j_l, n_l, j_l^{'}, n_l^{'}$，带入到(10)式后整理得：

$$\tan\delta_l=-\frac{(kb)^{2l+1}}{[(2l-1)!!]^2(2l+1)}\frac{\beta_l k^{'}b-l}{\beta_l k^{'}b+l+1} \tag{11}$$

其中$\beta_l=\frac{j_l^{'}(k^{'}b)}{j_l(k^{'}b)}$,令$-\frac{1}{[(2l-1)!!]^2(2l+1)}\frac{\beta_l k^{'}b-l}{\beta_l k^{'}b+l+1}=\zeta_l(k^{'}b)$
则上述表达式简化为：

$$\tan\delta_l=\zeta_l(k^{'}b)(kb)^{2l+1}$$

当l, k_0, b都给定后：

$$\lim_{k\to 0}\tan\delta_l=\zeta_l(k_0 b)(kb)^{2l+1}\to 0$$

在$k \to 0$，相邻相移的正切值的比值为：

$$\frac{\tan\delta_{l+1}}{\tan\delta_l} = \frac{\zeta_{l+1}(k_0b)(kb)^{2l+3}}{\zeta_l(k_0b)(kb)^{2l+1}} = \frac{\zeta_{l+1}(k_0b)}{\zeta_l(k_0b)}(kb)^2 = O((kb)^2)$$

所以后一项是前一项的高阶项，在这样的低能情况下，省略高阶项，只考虑$l=0$的S波，故可得总散射截面为：

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2(\delta_0) = \frac{4\pi}{k^2}\tan^2(\delta_0) \tag{12}$$

根据(11)式可得，当$l=0$时：

$$\tan\delta_0 = -\frac{\beta_0 k^{'}b}{\beta_0 k^{'}b+1}(kb)$$

$$\beta_0 = \frac{j_0^{'}(k^{'}b)}{j_0(k^{'}b} = \frac{k^{'}b\cos(k^{'}b)-\sin(k^{'}b)}{k^{'}b\sin(k^{'}b)}$$

$$\beta_0 k^{'}b = \frac{j_0^{'}(k^{'}b)}{j_0(k^{'}b} = \frac{k^{'}b\cos(k^{'}b)-\sin(k^{'}b)}{\sin(k^{'}b)} = \frac{k^{'}b}{\tan(k^{'}b)} - 1$$

$$\tan\delta_0 = kb[\frac{\tan(k^{'}b)}{k^{'}b} - 1]$$

故得总散射截面为：

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}k^2b^2[\frac{\tan(k^{'}b)}{k^{'}b} - 1]^2 = 4\pi b^2[\frac{\tan(k^{'}b)}{k^{'}b} - 1]^2 \tag{13}$$

Answer(b):
Determine the scattering length a_0 for this potential.
对于$r > b$的径向波函数为：

$$A_l(r) \propto \cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)$$

对于低能散射只考虑$l=0$的S波：

$$A_0(r) \propto \cos\delta_0 j_0(kr) - \sin\delta_0 n_0(kr) = \cos\delta_0\frac{\sin(kr)}{kr} + \sin\delta_0\frac{\cos(kr)}{kr}$$

$$A_0 = \frac{\cos(\delta_0)}{kr}[\sin(kr) + \tan(\delta_0)\cos(kr)]$$

当$kr \to 0$时，上述表达式为：

$$A_0(r) = \frac{\cos(\delta_0)}{kr}[kr + \tan\delta_0] \tag{14}$$

由(14)式可知，当$r = -\frac{\tan\delta_0}{k}$时，波函数为零，故此时，散射长度$a_0$为：

$$a_0 = -\frac{\tan\delta_0}{k} \tag{15}$$

将$\tan(\delta_0)$带入(15)式得：

$$a_0 = b[1 - \frac{\tan(k^{'}b)}{k^{'}b}] \tag{16}$$

Answer(c):

Sketch a_0 versus the potential strength V_0 witn V_0 starting at zero......

下面根据(16)式画出一个关于np低能散射的散射长度a_0和势能V_0的关系曲线。其中假设np之间势能的有效作用半径为$b = 1.4fm$,$m_n = m_p = 938Mev$,利用自然单位制将长度单位转换为能量单位，$[L] = [E]^{-1} \to \frac{1}{140Mev} = b^{'}$。将上述数据带入到表达式中可得：

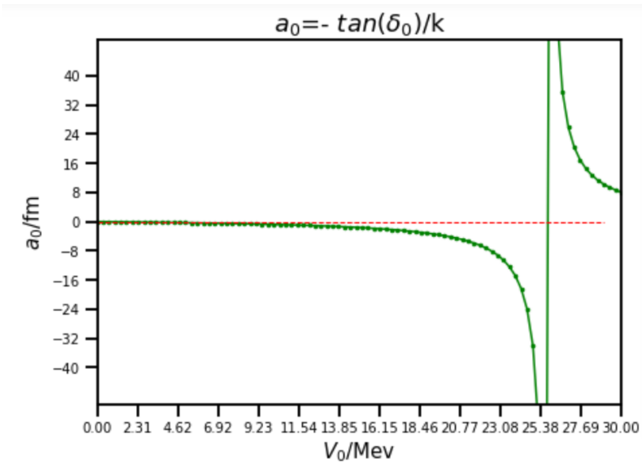

图 1: 散射长度a_0与势能V_0的关系曲线

上述图片是用python绘出的图像，其表达式即为$a_0 = b[1 - \frac{\tan(\sqrt{2m_nV_0}b^{'})}{\sqrt{2m_nV_0}b^{'}}] = 1.4fm[1 - \frac{\tan(\frac{\sqrt{2\times938V_0}}{140})}{\frac{\sqrt{2\times938V_0}}{140}}]$的关系式曲线图。可以从图中看见，当$V_0 \to 0$时，散射长度约为0。当$V_0 \to 25.4Mev$时，其$k_0b \to \pi/2$，那么这一点的物理含义是什么呢？

下面稍微计算一下，当$V_0 = 25.4Mev$时，$k_0b \to \pi/2$。

$$k_0b = \frac{\sqrt{2\times938V_0}}{140} = \frac{\sqrt{2\times938\times25.4}}{140} = 1.55921$$

$$\pi/2 = 1.57080$$

$$\frac{k_0b}{\pi/2} = 1.00743$$

$k_0b \to \pi/2$，此时散射长度是趋于无穷大的。

Answer(d):

For making a connection to bound states,review Section 6.3.3 in Zettili,which......

因为讨论的是低能散射下$l=0$的S波，所以可以用更简单的方法去求束缚态存在时的条件，但是Zettili的方法更加普适，不仅仅可以计算S波的束缚态，还可以计算其他波函数的束缚态条件。计算束缚态$E<0$:

1.当$r<b$时，根据薛定谔方程得到径向波函数$R_l(r)$的表达式如(3)式所示：

$$R_l(r)=B_l j_l(k^{'}r) \tag{17}$$

其中$k^{'2}=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)$。

2.当$r>b$时，根据薛定谔方程得到(4)式：

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2A_l(r)}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}A_l(r)}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]A_l(r)=0$$

其中$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}=-k_1^2<0$,$k_1^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}>0$。令$x=ik_1r$带入到上述表达式，可得：

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2A_l(x)}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}A_l(x)}{\mathrm{d}x}+[x^2-l(l+1)]A_l(x)=0 \tag{18}$$

此解是球贝塞尔函数$j_l(ik_1r),n_l(ik_1r)$故可得径向波函数为：

$$A_l(r)=C_l^{(1)}j_l(ik_1r)+C_l^{(2)}n_l(ik_1r) \tag{19}$$

根据边界条件，在$r\to\infty$时，波函数为0，此时$A_l=0$,而球贝塞尔函数的渐近行为如下：

$$\lim_{x\to\infty}j(x)=\frac{\sin(x-\frac{l\pi}{2})}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty}n(x)=-\frac{\cos(x-\frac{l\pi}{2})}{x}$$

上述表达式变为：

$$\lim_{r\to\infty}A_l(r)=C_l^{(1)}\frac{\sin(x-\frac{l\pi}{2})}{x}-C_l^{(2)}\frac{\cos(x-\frac{l\pi}{2})}{x}$$

上式$x=ik_1r$,将三角形式写成指数形式合并同类项可得：

$$\lim_{r\to\infty}A_l(r)=\frac{e^{-i\frac{l\pi}{2}}}{2ix}[C_l^{(1)}-iC_l^{(2)}]e^{ix}-\frac{e^{i\frac{l\pi}{2}}}{2ix}[C_l^{(1)}+iC_l^{(2)}]e^{-ix}$$

将$x=ikr$带入上述表达式得：

$$\lim_{r\to\infty}A_l(r)=-\frac{e^{-i\frac{l\pi}{2}}}{2k_1r}[C_l^{(1)}-iC_l^{(2)}]e^{-k_1r}+\frac{e^{i\frac{l\pi}{2}}}{2k_1r}[C_l^{(1)}+iC_l^{(2)}]e^{k_1r}$$

根据边界条件得：

$$C_l^{(1)}+iC_l^{(2)}=0$$
$$C_l^{(2)}=iC_l^{(1)} \tag{20}$$

将(20)式带入到(19)式中得：

$$A_l(r)=C_l^{(1)}[j_l(ik_1r)+in_l(ik_1r)]=C_l^{(1)}h_l(ik_1r)$$

上式$h_l(ik_1r)$是第一类汉克函数。

3.求出$r<b,r>b$的径向波函数及其导数：

$$R_l(r)=B_lj_l(k^{'}r)$$

$$R_l^{'}(r)=B_lk^{'}j_l^{'}(k^{'}r)$$

$$A_l(r)=C_l^{(1)}[j_l(ik_1r)+in_l(ik_1r)]=C_l^{(1)}h_l(ik_1r)$$

$$A_l^{'}(r)=C_l^{(1)}ik_1[j_l^{'}(ik_1r)+in_l^{'}(ik_1r)]=C_l^{(1)}ik_1h_l^{'}(ik_1r)$$

根据波函数的连续性得：

$$R_l(b)=A_l(b)\rightarrow B_lj_l(k^{'}b)=C_l^{(1)}h_l(ik_1b)$$

$$R_l^{'}(b)=A_l^{'}(b)\rightarrow B_lk^{'}j_l^{'}(k^{'}b)=C_l^{(1)}ik_1h_l^{'}(ik_1b)$$

将上式比较可得：

$$\frac{j_l(k^{'}b)}{k^{'}j_l^{'}(k^{'}b)}=\frac{h_l(ik_1b)}{ik_1h_l^{'}(ik_1b)} \tag{21}$$

已知：

$$k^{'2}b^2+k_1^2b^2=[\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)+(-\frac{2mE}{\hbar^2})]b^2=\frac{2m}{\hbar^2}V_0b^2=k_0^2b^2 \tag{22}$$

联立(21),(22)式就能得到束缚态存在条件。

4.下面计算$l=0$时S波的束缚态存在条件

$l=0$时，$j_l(x)$与$h_l(x)$即第一类球贝塞尔函数和第一类汉克函数及其导数为：

$$j_0(x)=\frac{\sin(x)}{x}$$

$$j_0^{'}(x)=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

$$h_0(x)=-i\frac{e^{ix}}{x}$$

$$h_0^{'}(x)=-ie^{ix}\frac{ix-1}{x^2}$$

根据(21)式得：

$$\frac{j_0(k^{'}b)}{k^{'}j_0^{'}(k^{'}b)}=\frac{h_0(ik_1b)}{ik_1h_0^{'}(ik_1b)}$$

将$j_0(x),j_0^{'}(x),h_0(y),h_0^{'}(y),x=k^{'}b,y=ik_1b$带入到上面表达式最终整理得：

$$k_1b=-\frac{k^{'}b}{\tan(k^{'}b)} \tag{23}$$

联立(22),(23)式：

$$k^{'2}b^2+k_1^2b^2=k_0^2b^2$$

$$k_1 b = -\frac{k^{'} b}{\tan(k^{'} b)}$$

令$k_1 b = \eta, k^{'} b = \xi$,上述表达式为：

$$\eta^2 + \xi^2 = k_0^2 b^2$$

$$\eta = -\frac{\xi}{\tan(\xi)}$$

联立上述表达式，以η为y轴，ξ为x轴。图像如下：

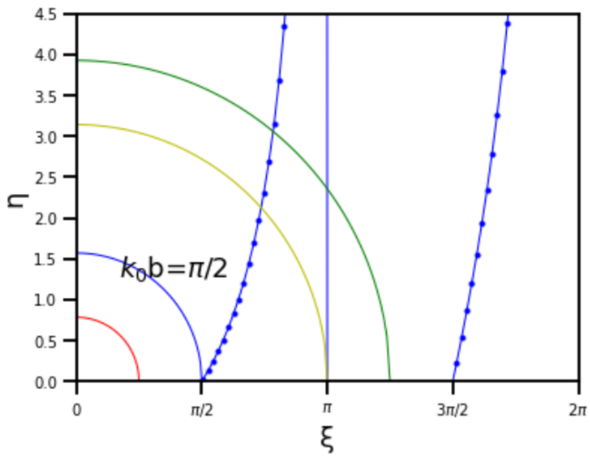

图 2: $l = 0$时S波出现束缚态的条件曲线图

根据图可以看见，当$k_0 b = \pi/2$时，S波刚好会出现束缚态，因此图1中散射长度的发散点应是S波出现束缚态的条件。

Answer(e):

Expend a_0 in powers of V_0,thereby creating a Born Series for the scattering length.

将散射长度a_0,用V_0级数展开。根据(15)式可知，要把散射长度展开，也就是把$\tan\delta_0$级数展开。当势能远远小于动能时，可以把势能作为微扰。根据(a)问的讨论可知$r < b, r > b$的波函数分别为：

$$R_l(r) = j_l(k^{'} r)$$

$$A_l(r) = \cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)$$

对于自由波函数，在整个空间上一定有如下方程成立：

$$(rj_l(kr))^{''} + [k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}](rj_l(kr)) = 0 \tag{24}$$

对于有势能存在的波函数，一定有如下方程成立：

$$U_l^{''}(r) + [k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(r)]U_l(r) = 0 \tag{25}$$

联立(24)和(25)式得到如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[(rj_l(kr)^{'}U_l(r))-(rj_l(kr)U_l^{'}(r))]=-\frac{2m}{\hbar^2}j_l(kr)rV(r)U_l(r)$$

对上述方程两边同时对r求积分得：

$$[(rj_l(kr)^{'}U_l(r))-(rj_l(kr)U_l^{'}(r))]|_0^{\infty}=\int_0^{\infty}-\frac{2m}{\hbar^2}j_l(kr)rV(r)U_l(r) \qquad (26)$$

已知$U_l(0)=0, 0\times j_l(0)=0$,在$r\to\infty$时上述波函数变化为：

$$rj_l(kr)\to\frac{1}{k}\sin(kr-\frac{l\pi}{2})$$

$$(rj_l(kr))^{'}\to\cos(kr-\frac{l\pi}{2})$$

$$U_l(r)\to\frac{1}{k}\sin(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l)$$

$$U_l^{'}(r)\to\sin(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l)$$

将上述四个渐近方程带入到(26)式可得：

$$\sin\delta_l=-\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^{\infty}krj_l(kr)V(r)U_l(r)\mathrm{d}r \qquad (27)$$

当$V_0\to 0$,上述表达式是越来越接近的直至相等，同为$j_l(kr)$。在势能趋向为0的过程中,相移δ_l也是趋向于0的，这样出射波才不会有相移的变化。上述等式应该有如下变化：

$$R_l(r)=j_l(k^{'}r)\to R_l(r)=j_l(kr)$$

$$A_l(r)=\cos\delta_l j_l(kr)-\sin\delta_l n_l(kr)\to A_l(r)=j_l(kr)$$

则上述表达式(27)可变为：

$$\sin\delta_l=-\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^{\infty}k^2r^2j_l^2(kr)V(r)\mathrm{d}r=\tan\delta_l \qquad (28)$$

将$\tan\delta_0$用V_0展开得：

$$\tan\delta_0=-\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^{\infty}k^2r^2j_0^2(kr)V(r)\mathrm{d}r$$

将$V(r)=-V_0$带入上式可得：

$$\tan\delta_0=\frac{2mV_0}{k\hbar^2}\int_0^{\infty}k^2r^2j_0^2(kr)\mathrm{d}r$$

以下补充了一点自己的想法，不知道对不对，还请同学和老师们能给予纠正.并且上式计算结果在奇点处并不发散，有问题。

【当$\delta_l \to 0$的过程中，$\cos\delta_l \to 1$,$\sin\delta_l \to 0$,故此时$A_l(r)$就退化为了$R_l(r)$。所以在$V_0 \to 0$过程，可以用$A_l(r)$,来表示整个空间上的径向波函数。将$A_l(r) = \frac{U_l(r)}{r} \to U_l(r) = A_l(r)r$带入到(27)式可得：

$$\sin\delta_l = -\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_l(kr)V(r)A_l(r)\mathrm{d}r$$

将$A_l(r) = \cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)$带入到上式可得：

$$\sin\delta_l = -\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_l(kr)V(r)\cos\delta_l j_l(kr)\mathrm{d}r + \frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_l(kr)V(r)\sin\delta_l n_l(kr)\mathrm{d}r$$

由此得到关于$\sin\delta_l$的迭代表达式，将两边同时除以$\cos\delta_l$就能得到关于$\tan\delta_l$的表达式：

$$\tan\delta_l = -\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_l(kr)V(r)j_l(kr)\mathrm{d}r + \frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_l(kr)V(r)\tan\delta_l n_l(kr)\mathrm{d}r$$

最终得到$\tan\delta_0$的展开式为：

$$\tan\delta_0 = -\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_0(kr)V(r)j_0(kr)\mathrm{d}r + \frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2r^2j_0(kr)V(r)\tan\delta_0 n_0(kr)\mathrm{d}r$$

】

Answer(f):

Show that this Bron series diverges when the potential ....

Answer(g):

The same analysis can be used for repulsive potentials by changing the sign of V_0.Sketch a_0 for......

这里只计算低能散射下的波函数，且有$k \to 0$。势能如下所示$V_0 > 0$。

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \tag{29}$$

1.当$r < b$时，由薛定谔方程可得(2)式：

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R_l(r)}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R_l(r)}{\mathrm{d}r} + [k'^2r^2 - l(l+1)]R_l(r) = 0$$

其中$k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$,因为$E < V_0$,令$x = ik_2r, k_2^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$,所以$k'^2 = -k_2^2$上式可简化为：

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R_l(x)}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}R_l(x)}{\mathrm{d}x} + [x^2 - l(l+1)]R_l(x) = 0$$

上式解为：

$$R_l(r) = B_l j_l(ik_2r)$$

2.当$r > b$时，由薛定谔方程可得(4)式,最终径向波函数的解入(8)所示：

$$A_l(r) = \cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)$$

3.在$r=b$处根据连续性条件，可得(9)式：

$$\frac{ik_2 j_l^{'}(ik_2b)}{j_l(ik_2b)} = k\frac{\cos\delta_l j_l^{'}(kb) - \sin\delta_l n_l^{'}(kb)}{\cos\delta_l j_l(kb) - \sin\delta_l n_l(kb)}$$

讨论的是低能散射，这里只考虑S波，令$l=0$,上述表达式最终变为：

$$\tan(\delta_0) = kb[1 - \frac{\tanh k_2 b}{k_2 b}] \tag{30}$$

低能散射下的散射长度为：

$$a_0 = -\frac{\tan\delta_0}{k} = b[\frac{\tanh k_2 b}{k_2 b} - 1] \tag{31}$$

沿用(c)问题中的参数，画出图像如下

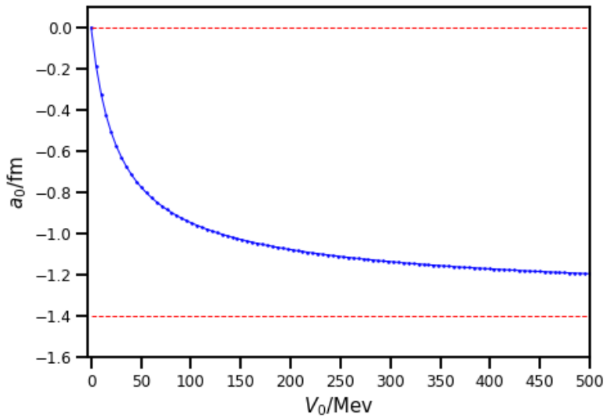

图 3:

从图中可以看出，对于排斥势能的散射长度，不存在奇点，也就是说，对于排斥势能而言，不存在束缚态。也可以通过解薛定谔方程来解试试看。看是否存在束缚能级。

Answer(h):

Obtain an expression for the total cross section for low energy scattering in terms of the scattering length......

根据(g)问，可以得到，当体系是排斥势$V_0 > 0$时，低能散射下，S波的散射长度和散射相移的正切值为：

$$\tan\delta_0 = kb[1 - \frac{\tanh(k_2 b)}{k_2 b}]$$

$$a_0 = b[\frac{\tanh k_2 b}{k_2 b} - 1]$$

总散射截面为：

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\tan^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}k^2b^2[1 - \frac{\tanh(k_2 b)}{k_2 b}]^2 = 4\pi b^2[1 - \frac{\tanh(k_2 b)}{k_2 b}]^2 = 4\pi a_0^2$$

由此得到低能情况下总散射截面和散射长度之间的关系为：

$$\sigma_{tot} = 4\pi b^2[1 - \frac{\tanh(k_2 b)}{k_2 b}]^2 = 4\pi a_0^2 \tag{32}$$

当势能趋向无穷大时，函数$f(x) = \tanh(x)/x$的图像如下

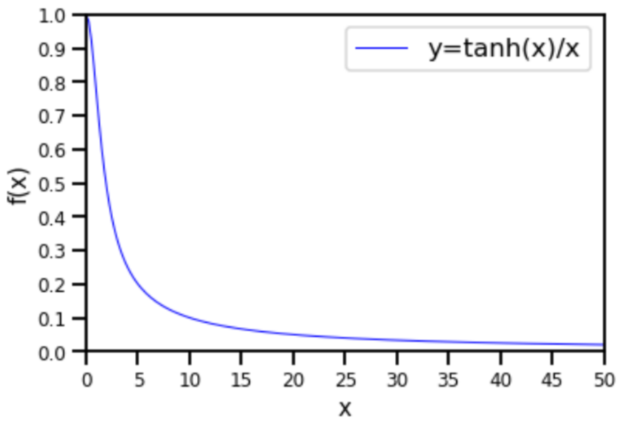

图 4:

可知当$x \to \infty$时，$f(x \to \infty) \to 0$因此此时：

$$a_0^2 \to b^2$$

$$\sigma_{tot} = 4\pi b^2 = \sigma_{hardsphere}^{tot}$$

对于上述问题(e)中的推导得出(28)式得玻恩近似的散射相移表达式:

$$\sin\delta_l = -\frac{2m}{k\hbar^2}\int_0^\infty k^2 r^2 j_l^2(kr)V(r)\mathrm{d}r$$

从式中可以看出，当$\sin\delta_l < 0$时，势能是正的，为排斥势，总的散射截面是收敛的，不会出现尖锐的峰值，没有束缚态。当$\sin\delta_l > 0$时，势能是负的，吸引势，总的散射截面会在某些点出发散，在发散点会出现束缚态。

Answer(i)