IAV模型

刘昊

同济大学

2022/5/16

理论

对于散射问题，为了方便计算，我们通常可以将相互作用势分成两部分

$$H = K + V_1 + V_2$$

$$(E - K - V_1 - V_2)\Psi = 0$$

$$(E - K - V_1)\Psi = V_2\Psi$$

如果对于V_1部分是可解的，那么这部分波函数满足

$$(E - K - V_1)\chi = 0$$

两个上式相加可以得到

$$(E - K - V_1)\Psi = V_2\Psi + (E - K - V_1)\chi$$

那么这种情况下，解可以表示为

$$|\Psi^+\rangle = |\chi^+\rangle + \frac{1}{(E^+ - K - V_1)} V_2 |\Psi^+\rangle$$

将前后两步的T矩阵进行叠加，这样T矩阵可以写作

$$\mathcal{T} = \left\langle e^{i\vec{k}*\vec{r}} |V_1| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle + \left\langle \chi_\alpha^{(-)} |V_2| \Psi_\alpha^{(+)} \right\rangle$$

式中的第一项显然是已知的，第二项在求解时，可以进行一些近似比如将$\Psi_\alpha^{(+)} \cong \chi_\alpha^{(+)}$。这样整个T矩阵就是可解的。

DWBA近似在原理上基本也遵照这个方法，显然，对于任意的相互作用势V，都会存在

$$V = U + (V - U)$$

理论上U的形式是任意的，但由于光学势是一个单体势，所以这里一般使用的是光学势。依照上面的思路，可以得到

$$(E - H_\alpha - K_\alpha - U_\alpha)\chi_\alpha = 0$$

$$(E - H_\alpha - K_\alpha - U_\alpha)\Psi_\alpha = (V_\alpha - U_\alpha)\Psi_\alpha + (E_\alpha - H_\alpha - K_\alpha - U_\alpha)\chi_\alpha$$

$$
\begin{aligned}
\left|\Psi_\alpha^{(+)}\right\rangle &= \left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle + \frac{1}{E - H_\alpha - K_\alpha - V_\alpha + i\varepsilon}(V_\alpha - U_\alpha)\left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle \\
&= \left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle + \frac{1}{E^+ - H + i\varepsilon}(V_\alpha - U_\alpha)\left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle \\
&= \left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle + \frac{(V_\alpha - U_\alpha)}{(E^+ - H_\alpha - K_\alpha - U_\alpha)}\left|\Psi_\alpha^{(+)}\right\rangle
\end{aligned}
$$

将其带入到T矩阵的方程中可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\beta\alpha} &= \left\langle \phi_\beta \middle| V_\beta \middle| \Psi_\alpha^{(+)} \right\rangle \\
&= \left\langle \phi_\beta \middle| V_\beta \middle| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle + \left\langle \phi_\beta \middle| V_\beta \frac{1}{E - H + i\varepsilon}(V_\alpha - U_\alpha) \middle| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle \\
&= \left\langle \phi_\beta \middle| V_\beta - V_\alpha + U_\alpha \middle| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle + \left\langle \Psi_\beta^{(-)} \middle| V_\alpha - U_\alpha \middle| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle
\end{aligned}
$$

由于

$$H = H_\alpha + V_\alpha + K_\alpha = H_\beta + V_\beta + K_\beta$$

扭曲波函数还可以写为

$$\left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle = \frac{(V_\beta - V_\alpha + U_\alpha)}{(E^+ - H_\beta - K_\beta)}\left|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle$$

同样从β反应道出发，利用对称性，可以将T矩阵进一步改写

$$\left\langle \phi_\beta \middle| V_\beta - V_\alpha + U_\alpha \middle| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle + \left\langle \Psi_\beta^{(-)} \middle| V_\alpha - U_\alpha \middle| \chi_\alpha^{(+)} \right\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{T}_{\beta\alpha} = \left\langle \chi_\beta^{(-)} \middle| V_\alpha - V_\beta + U_\beta \middle| \phi_\alpha \right\rangle + \left\langle \chi_\beta^{(-)} \middle| V_\beta - U_\beta \middle| \Psi_\alpha^{(+)} \right\rangle$$

注意到β通道内的扭曲波函数可以写为

$$\left\langle\chi_\beta^{(-)}\right| = \left\langle\phi_\beta\right| + \left\langle\frac{1}{E^- - H_\beta - K_\beta} U_\beta^\dagger \chi_\beta^{(-)}\right|$$

$$\left\langle\chi_\beta^{(-)}\right| = \left\langle\phi_\beta\right| + \left\langle\frac{1}{E^- - H_\beta - K_\beta - U_\beta^\dagger} U_\beta^\dagger \phi_\beta\right|$$

这样综合上面的T矩阵形式我们可以获得

$$\mathcal{T}_{\beta\alpha} = \left\langle\phi_\beta\middle|V_\beta\middle|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle + \left\langle\phi_\beta\middle|V_\beta \frac{1}{E - H + i\varepsilon}(V_\alpha - U_\alpha)\middle|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle$$

$$= \left\langle\phi_\alpha\middle|U_\alpha\middle|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle\delta_{\alpha\beta} + \left\langle\chi_\beta^{(-)}\middle|(V_\alpha - U_\alpha) + (V_\beta - U_\beta)\frac{1}{E - H + i\varepsilon}(V_\alpha - U_\alpha)\middle|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle$$

还可以写为

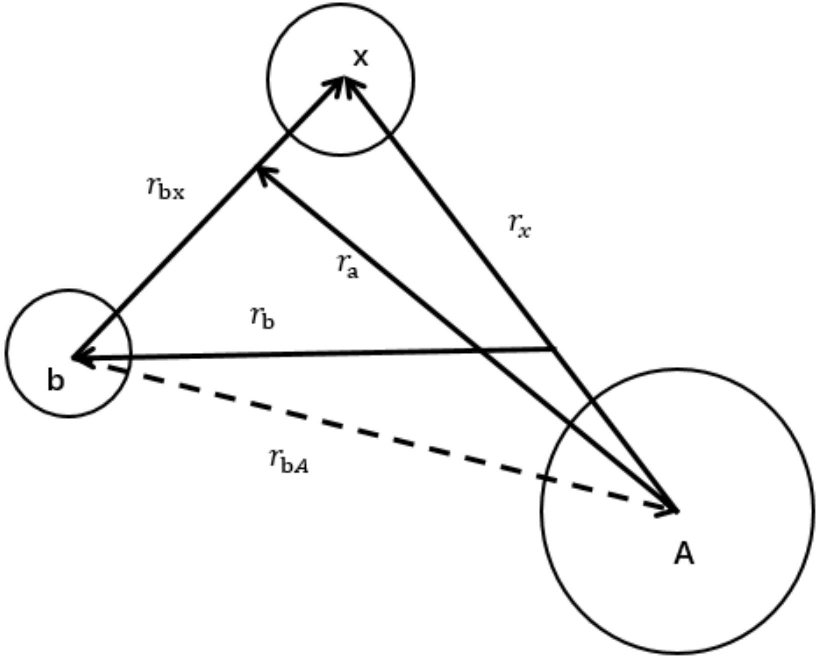
$$\mathcal{T}_{\beta\alpha} = \left\langle\chi_\alpha^{(-)}\middle|U_\alpha\middle|\phi_\alpha\right\rangle\delta_{\alpha\beta} + \left\langle\chi_\beta^{(-)}\middle|(V_\beta - U_\beta) + (V_\beta - U_\beta)\frac{1}{E - H + i\varepsilon}(V_\alpha - U_\alpha)\middle|\chi_\alpha^{(+)}\right\rangle$$

通过忽略二阶项和高阶项，得到了扭曲波玻恩近似，通过扭曲波的位置定义两种不同的一阶扭曲波玻恩近似。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mathrm{DWBA}}_{\beta\alpha(\mathrm{post})} &= \langle \chi^{(-)}_{\alpha} | U_{\alpha} | \phi_{\alpha} \rangle \delta_{\alpha\beta} + \langle \chi^{(-)}_{\beta} | V_{\beta} - U_{\beta} | \chi^{(+)}_{\alpha} \rangle \\
\mathcal{T}^{\mathrm{DWBA}}_{\beta\alpha(\mathrm{prior})} &= \langle \phi_{\alpha} | U_{\alpha} | \chi^{(+)}_{\alpha} \rangle \delta_{\alpha\beta} + \langle \chi^{(-)}_{\beta} | V_{\alpha} - U_{\alpha} | \chi^{(+)}_{\alpha} \rangle
\end{aligned}
$$

被称之为DWBA的前表象（prior）与后表象（post）形式。

雅各比坐标描述三体系统



$$a(=b+x)+A\rightarrow b+\mathrm{B}(=\mathrm{A}+\mathrm{x})$$

系统的哈密顿量可以写为

$$H=K+V_{bx}+U_{bA}(\boldsymbol{r}_{bA})+H_A(\xi)+V_{xA}(\xi,\boldsymbol{r}_x)$$

几个系统的薛定谔方程如下表示

$$H_A \varphi_A^0 = E_A^0 \varphi_A^0$$

靶核A

$$H_{xA} \Psi_{xA}^c = E_{xA}^c \Psi_{xA}^c$$

其中 $H_{xA} \equiv H_A + V_{xA} + K_{xA}$

(x+A)系统

$$\Psi(\xi, \vec{r}_x, \vec{r}_b) = \frac{1}{E^+ - K_b - U_{bB} - H_B} V_{\text{post}} \Psi(\xi, \vec{r}_x, \vec{r}_b)$$

$$V_{\text{post}} = V_{bx} + U_{bA} - U_{bB}$$

在后表象中表示系统的总波函数

从考虑出射粒子b的状态开始，其满足

$$(K_b + U_{bB}^{\dagger} - E_b)\chi_b^-(k_b, r_b) = 0$$

将粒子b的波函数向总波函数做投影，这样可以得到剩余部分运动的波函数，也就是粒子x的波函数

$$Z_x(k_b, \xi, \vec{r}_x) = \langle \vec{r}_x \chi_b^- | \Psi^+ \rangle = \frac{1}{E^+ + H_b - E_b} \langle \vec{r}_x \chi_b^- | V_{\text{post}} | \Psi^+ \rangle$$

改写成微分形式可以写为

$$[E^+ + H_b - E_b] Z_x(k_b, \xi, \vec{r}_x) = \langle \vec{r}_x \chi_b^- | V_{\text{post}} | \Psi^+ \rangle$$

这里将Ψ+取DWBA近似的形式

$$\Psi(\xi, r_x, r_b) = \phi_A^0(\xi)\phi_a(r_{bx})\chi_a^+(\vec{r_A})$$

得到x的波函数

$$Z_x\left(k_b,\xi,\vec{r}_x\right)=\frac{1}{E^{+}+H_b-E_b}\left\langle\vec{r}_x\chi_b^{-}\middle|V_{\text{post}}\middle|\phi_A^0\phi_a\chi_a^{+}\right\rangle$$

值得注意的是，这个波函数包括x+A的相对运动，也包括A的激发态，即

$$Z_x\left(\vec{k}_b,\xi,\vec{r}_x\right)=\sum_c\psi_x^c\left(\vec{k}_b,\vec{r}_x\right)\phi_A^c(\xi)$$

这样就获得了整体波函数的每一项，可以通过波函数求得T矩阵

$$\mathcal{T}_{\beta\alpha}=\left\langle Z_x\chi_b^{-}\middle|V_{\text{post}}\middle|\phi_A^0\phi_a\chi_a^{+}\right\rangle$$

但由于这种方法涉及的末态过多，求解很复杂，所以一般不使用这种方法。

$$(E_x^+ - K_x - \mathcal{U}_x)\psi_x^0(\vec{k}_b, \vec{r}_x) = \rho(\vec{k}_b, \vec{r}_x)$$

可以通过光学势的方法将波函数分成去弹部分以及弹性破裂部分。其中弹性破裂部分可以使用CDCC方法获得，去弹部分可以利用Cotanch提出的耦合道光学定理（coupled–channels optical theorem）求得，

$$\left.\frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b}\right|_{\mathrm{EBU}} = \frac{(2\pi)^{-2}}{\hbar v_i}\rho_b(E_b)\int \delta\left(E_f - E_i\right)\left|T_{fi}\right|^2 d\vec{k}_x$$

$$\left.\frac{d^2\sigma}{dE_b d\Omega_b}\right|_{\mathrm{NEB}} = -\frac{2}{\hbar v_i}\rho_b(E_b)\langle\psi_x^0|W_x|\psi_x^0\rangle$$

结束语

Thank you!