组会

薄纪铮

2023 年 10 月 31 日

目录

1 用 resonant 完全集和 transient functions 展开 decaying wf (ref: https://doi.org/10.1016/j.aop.2020.168348)

1.1 Resonance 的 Gamow 描述: Lack of unitarity

- 把 decay 的 wave function 看作含时的 Schrodinger 方程的的解

$$[\kappa_n^2 - H]u_n(r) = 0$$

- 分成内部和外部两个部分, 然后 match 一个 outgoing 的边界条件。

得到 complex 的波矢量:

$$\kappa_n = \alpha_n - i\beta_n$$

其中 $\alpha_n, \beta_n > 0$

定义 Proper complex poles:$\alpha_n > \beta_n$ 的 poles

因为 complex energy 和 complex wavenumber 之间的关系是:

$$\kappa_n^2 = E_n = \epsilon_n - i\Gamma_n/2$$

$$\epsilon = \alpha_n^2 - \beta_n^2, \quad \Gamma_n = 4\alpha_n\beta_n$$

因此 resonant state 的 Gamow 表示可以写做

$$\Psi_G(r,t) = \begin{cases} u_n(r)e^{-i\epsilon_n t}e^{-\Gamma_n t/2}, & r \leq a \\ e^{i(\alpha_n r - \epsilon_n)t}e^{\beta_n r}e^{-\Gamma_n t/2}, & r \geq a \end{cases}$$

其中

- $u_n(r)$ 是 potential 内部的 resonant 解
- 而外部解第一项是一个 outgoing BC
- 外部解第二项是 decay rate 这个量

然而上述 Gamow state Ψ_G 不满足 Unitarity, 因为它的全空间积分不为 1 而是发散的

$$\int_0^\infty |\Psi_G(r,t)|^2 dr \to \infty$$

这个 divergence 虽然不满足概率上的 Unitarity, 但它是物理的: 在外部 r 处观察到的粒子是系统在 r/v 时间之前所 decay 出来的。因此波函数会随着时间指数因子 $exp(r/v\tau)$ 增加,τ 为平均寿命

- 上述的 outgoing BC 是发散的
- 因此需要一个新的 outgoing BC: 包含 complex energy eigenvalue 以及 exponetial decay law
- 从而 decaying wf 平方可积 $\to$ Conventional formalism of quantum mechanics
- Gamow's approach 是独立于传统量子力学理论体系之外的

1.2 Resonant expansions

Decaying wf 的 resonant 展开形式:

$$\Psi(r,t) = \int_0^a g(r,r',t)\Psi(r',0)dr'$$

g 是 retarded green function, 由 laplace transform 得到:

$$g(r,r',t) = \frac{i}{2\pi}\int_{C_0} G^+(r,r';k)e^{-ik^2 t}2kdk$$

其中 C_0 回路为 resonance 径向解的归一化条件为:

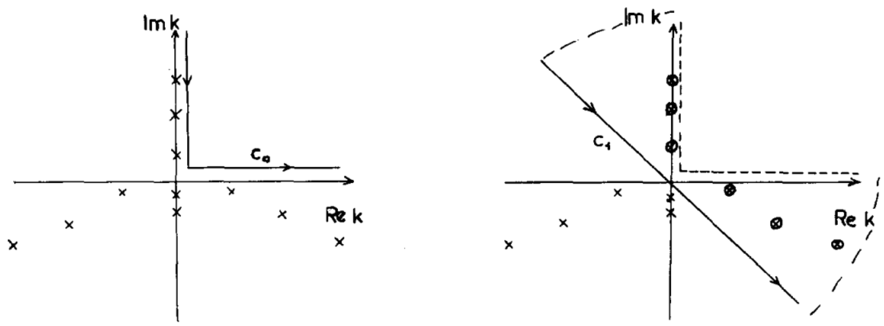

Fig. 1. Location of poles in *k*-plane.

Fig. 2. Contour of steepest descent for time factor.

图 1: complex k plane 上的极点分布以及积分回路 C_0, ref: Nuclear Physics A265 (1976) 443-460

$$\int_0^a u_n^2(r)dr + i\frac{u_n^2(a)}{2\kappa_n} = 1$$

推导出 decaying wf 的总的表达式:

$$\Psi(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(r) e^{-i\epsilon_n t} e^{-\Gamma_n t/2} + Z(r,t)$$

其中 Z 是非指数形式的贡献

1.2.1 解析表达: in terms of resonant states and transient functions

前面提到了 decaying wf 的 resonant 展开为:

$$\Psi(r,t) = \int_0^a g(r,r',t)\Psi(r',0)dr'$$

$$g(r,r',t) = \frac{i}{2\pi}\int_{C_0} G^+(r,r';k)e^{-ik^2 t}2kdk$$

因此只需要将 outgoing 的 green function 解析写出:

$$G^+(r,r',k) = \frac{1}{2k}\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{k-\kappa_n} \quad (r,r') < a$$

$$G^+(r,r',k) = G^+(r',a,k)e^{ik(r-a)}, \quad r' < a, r \geq a$$

有了 green function 之后, 我们能够去最终写出总的 decaying wf 的形式:

$$\Psi(r,t)=\begin{cases}\Psi_{in}(r,t), & r\le a\\ \Psi_{ex}(r,t), & r\ge a\end{cases}$$

然后我们分别写出 internal 和 external 的 wf 的具体形式

$$\Psi_{in}(r,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n u_n(r)M(y_n^o),\quad r\le a$$

$$\Psi_{ex}(r,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n u_n(a)M(y_n),\quad r\ge a$$

其中系数 C_n 为总的 decaying wf 和每个 resonant state u_n 的 overlap

$$C_n=\int_0^a \Psi(r,0)u_n(r)dr$$

此外 M 是 transient functions, u_n 为 resonant states
transient functions M 的解析形式

$$\begin{aligned}M(y_n)=&\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(r-a)}e^{-ik^2t}}{k-\kappa_n}dk\\ =&\frac{1}{2}e^{i(r-a)^2/4t}\omega(iy_n)\\ =&\frac{1}{2}e^{i(r-a)^2/4t}e^{y_n^2}erfc(y_n)\end{aligned}$$

其中

$$\omega(z)=exp(-z^2)erfc(-iz)$$

是 complex 的误差函数
而宗量

$$y_n=e^{-i\pi/4}(1/4t)^{1/2}[(r-a)-2\kappa_n t]$$

y_n^o 因子就是 y_n 在 $r=a$ 处的取值

$$y_n^o=-e^{-i\pi/4}\kappa_n t^{1/2}$$

最后将 decaying solution 的内部和外部分别用 transient function 和 resonant states 解析表示出来得到

$$\Psi_{in}(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n u_n(r)e^{-i\epsilon_n t}e^{-\Gamma_n t/2}+R(r,t)$$

其中
$$R(r,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}[C_n u_n(r) M(-y_n^o) - \bar{C}_n^* u_n^*(r) M(y_{-n}^o)]$$
另一方面,Ψ_{ex} 的解析式:
$$\Psi_{ex}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(a) e^{i\kappa_n(r-a)} e^{-i\epsilon_n t} e^{-\Gamma_n t/2} + J(r,t)$$
其中 nonexponential term J: (确切地说, 这里的非指数项贡献指的是非指数增长项的贡献)
$$J(r,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}[C_n u_n(a) M(-y_n) - \bar{C}_n^* u_n^*(a) M(y_{-n})]$$
把 y_n 表达式中的 complex k 的表达式 $\kappa_n = \alpha_n - i\beta_n$ 具体代入有
$$\begin{aligned} y_n =& \frac{1}{2(2t_0)^{1/2}}[(r-a) - 2(\alpha_n - \beta_n)t_0] \\ & - i[(r-a) - 2(\alpha_n + \beta_n)t_0] \end{aligned}$$
至此完成了 decaying wf 的解析展开

1.2.2 渐近行为

考虑 decaying solution $\Psi_{ex}(r,t)$ 的渐近行为, 当 $|r| \gg |2\kappa_n t|$
$$y_n \simeq \frac{1}{2} e^{-i\pi/4} \frac{1}{t^{1/2}} r$$
因此 $r \gg a$ 时的 $\Psi(r,t)$ 的渐近行为是
$$\Psi_{ex}(r,t) \simeq \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{i\pi/4} e^{ir^2/4t} t^{1/2} \sum_{\infty}^{\infty} C_n u_n(a) \frac{1}{r}$$
有概率流守恒
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} |\Psi(r,t)|^2 dr = 0$$
因为假设了 initial state 概率积分为 1, 所以
$$\int_0^{\infty} |\Psi(r,t)|^2 dr = I_{in}(t) + I_{ex}(t) = 1$$
含时演化的 decaying wf 满足了 unitarity 这个条件。

2 举例

考虑势

$$V(r) = \lambda\delta(r-a)$$

解出的 wf 和 energy (complex k) 分别为:

$$u_n(r) = \begin{cases} A_n sin(\kappa_n r) & r \le a \\ B_n e^{i\kappa_n r} & r \ge a \end{cases}$$

$$2i\kappa_n + \lambda(e^{2i\kappa_n a} - 1) = 0$$

取 $\lambda = 100, a = 1$ 写出近似解:

$$\kappa_n \simeq \frac{n\pi}{a}(1-\frac{1}{\lambda a}) - i\frac{1}{a}(\frac{n\pi}{\lambda a})^2$$

从而给出 Gamow 和 resonant expansion 重构后的 wf

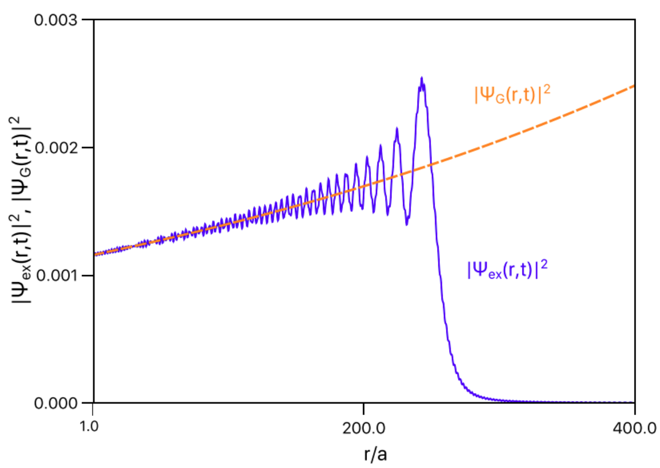

图 2: 外部的 Gamow solution $|\Psi_G(r,t)|^2$, 以及 resonance expansion $|\Psi_{ex}(r,t)|^2$

2.1 Observable (ref: DOI: 10.1016/S0065-3276(10)60007-X)

2.1.1 Survival probability

The survival amplitude: t 时刻粒子保持在其初态的概率幅度, 定义为

$$A(t) = \int_0^L \Psi^*(x,0)\Psi(x,t)dx$$

因此 Survival probability 为

$$S(t) = |A(t)|^2$$

2.1.2 Nonescape probability

Nonescape probability: t 时刻粒子仍然在势阱内的概率, 定义为

$$P(t) = \int_0^L |\Psi(x,t)|^2 dx$$

2.1.3 Width

在 Gamow 描述中, 宽度 width:

$$\Gamma_n = \hbar(\frac{\hbar\alpha_n}{m})\frac{|u_n(a)|^2}{\int_0^a |u_n(r)|^2 dr'}$$

它正比于 decaying 粒子的速度乘以粒子在 potential 表面的概率并除以它在 interaction 区域内存在的概率。