组会

薄纪铮

2023 年 10 月 17 日

目录

1 alpha decay 的 cluster 理论

首先 alpha 和 core 之间的 potential 可以写作:

$$V(r) = V_N(r) + V_C(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{(L+\frac{1}{2})^2}{r^2}$$

其中 V_N 是核势,V_0, a, R 是参数

$$V_N(r) = -V_0\frac{1+cosh(R/a)}{cosh(r/a)+cosh(R/a)}$$

Coulomb 势 V_C

$$V_C(r) = \frac{Z_1Z_2e^2}{r} \quad (r \geq R) \tag{1}$$

$$= \frac{Z_1Z_2e^2}{2R}[3-(\frac{r}{R})^2] \quad (r \leq R) \tag{2}$$

a 和 V_0 可以直接给定, 但是径向参数 R 需根据用 Bohr-Sommerfeld 量子化条件确定:

$$\int_{r_1}^{r_2} dr\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}[Q-V_N(r)-V_C(r)] - \frac{(L+\frac{1}{2})^2}{r^2}} \tag{3}$$

$$= (2n+1)\frac{\pi}{2} = (G-L+1)\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

上式其实就是 $\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}|Q-V(r)|}$ 在 r_1, r_2 区间的积分
这类势的基本形状大致如下图虚线所示

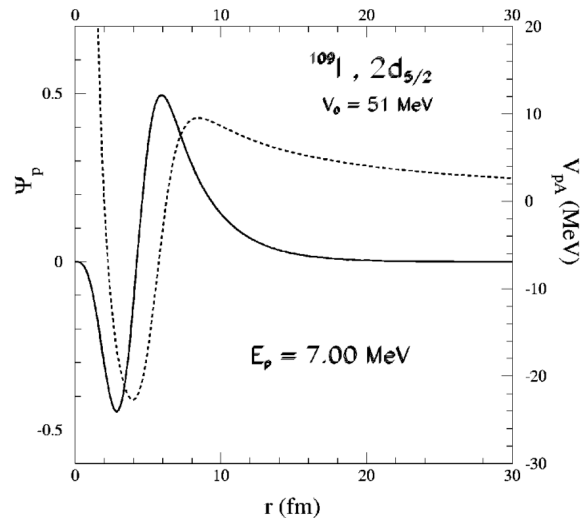

图 1: 考虑离心势之后, 势的总的行为大致如上图虚线所示, 引用于 PHYSICAL REVIEW C 60 054318

G 量子数的一般性取法

$$G = 22 \quad N > 126 \tag{5}$$
$$G = 20 \quad 82 < N \leq 126 \tag{6}$$
$$G = 18 \quad N \leq 82 \tag{7}$$

decay 宽度 Γ_α 是

$$\Gamma = PF\frac{\hbar^2}{4\mu}exp[-2\int_{r_2}^{r_3} drk(r)]$$

其中 P 是 alpha 的预形成因子或者说是预形成概率
F 的归一化条件是:

$$F\int_{r_1}^{r_2} dr\frac{1}{k(r)}cos^2[\int_{r_1}^{r} dr'k(r') - \frac{\pi}{4}] = 1$$

$k(r)$ 为波矢量的模

$$k(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}|Q-V(r)|}$$

然后有 decay 的半衰期:

$$T_{1/2} = \hbar ln2/\Gamma$$

因此计算 alpha decay 相关量的基本步骤是:

- 先给出体系各组分的势从而获得总的势
- 解出方程 $Q = V(r)$ 的所有根, 正常情况下应该是 3 个
- 用 Bohr-Sommerfeld 量子化条件确定径向参数 R
- 计算宽度

2 具体计算过程

我们选取文章 PHYSICAL REVIEW C 68,034319(2003) 为例, 对

$$^{209}Bi \rightarrow ^{205}Tl + \alpha$$

进行计算

^{A}Z	^{A}Z	I_i	I_f	L_α	R(fm)	Q_α(MeV)	T_α(expt.)	T_α(Calc.)
^{209}Bi	^{205}Tl	$9/2^-$	$1/2^+$	5	7.234	3.137	1.9×10^{19} yr	1.8×10^{19} yr

图 2: PHYSICAL REVIEW C 68,034319(2003) 的实验和计算数据

计算时, 第一步就是解出 $Q = V(r)$ 这个方程的根 (正常情况下有三个解)
在开始这一步之前, 需先明确这个衰变能 Q 的定义

$$Q = \frac{A_p}{A_p - 4} E_\alpha + (65.3 Z_P^{7/5} - 80.0 Z_p^{2/5}) 10^{-6} MeV$$

这里 E_α 是 α 的衰变动能
然后尝试解 $Q = V(r)$ 的根, 这里使用比较经典的零点存在定理, 先将 $Q - V(r)$ 变成函数 $f(r)$ 去做离散化, 然后用前后格点乘积小于 0 的判据去找方程的根

```
ccccccc
        do i=1,n        !!k^2=2mu/h^2(Q-V(r))=k^2,|k|=sqrt(abs(k^2))
          fr(i)=kr(Q,mu,v0,a,r0,z12,l,rr(i))
        end do
ccccccc
        k=1
        do i=1,n-1      !!where Q=V(r),r(i) -> rr(r(i)) -> r_i
          if(fr(i)*fr(i+1)<0) then
            r(k)=i
            k=k+1
          end if
        end do
        write(*,*) 'the number of radial points where Q=V(r):',k-1
ccccccc
```

图 3: 找 $Q = V(r)$ 的根

结果找到根的个数为 3, 这是符合预期的 理论上在得到这几个根 r_1, r_2, r_3

```
haizailache@bojizheng:/mnt/d/Desktop/wstuffs/2bodyexercise/code/wkb$ ./wkb
 Q value:   3.1370000000000000      MeV
 global quantum num G:   20.000000000000000
 the number of radial points where Q=V(r):           3
```

图 4: 根的个数

后还需要用 Bohr-Sommerfeld 量子化条件确定径向参数 R, 但是由于文章已经做好了这个计算, 已经给了这个量子化条件定出来的参数, 所以我们实际算的时候直接代入 $R = 7.234fm$ 即可

这个用量子化条件寻找径向参数 R 的过程可以自己通过 do while 语句实现:

```fortran
ccccccc
         s=0d0
         r0=0.01d0
         do while(abs(s-(G-L+1d0)*pi/2d0)>1e-1)
ccccccc
        do i=1,n        !!k^2=2mu/h^2(Q-V(r))=k^2,|k|=sqrt(abs(k^2))
          fr(i)=kr(Q,mu,v0,a,r0,z12,l,rr(i))
        end do
ccccccc
        k=1
        do i=1,n-1      !!where Q=V(r),r(i) -> rr(r(i)) -> r_i
          if(fr(i)*fr(i+1)<0) then
            r(k)=i
            k=k+1
          end if
        end do
        write(*,*) 'the number of radial points where Q=V(r):',k-1
ccccccc
        s=0d0
        do i=r(1),r(2)  !!\int_{r_1}^{r_2}dr\sqrt{2\mu/\hbar^2(Q-V(r))}=\int |k(r)|dr
          s=s+hcm*sqrt(abs(fr(i)))
        end do
         r0=r0+0.01d0    !!do while loop body
         end do
         write(*,*) r0
```

图 5: 用 do while 寻找合适的径向参数 R, 判据为 potential well 范围内的积分为量子化条件的值

实际算的时候直接用文章里面的参数 R=7.234fm 即可

我们已经用 r_1, r_2, r_3 分好了积分区间, 然后只需要再做两个数值积分即可

$$F\int_{r_1}^{r_2} dr\frac{1}{k(r)}cos^2[\int_{r_1}^{r} dr'k(r') - \frac{\pi}{4}] = 1$$

$$\Gamma = PF\frac{\hbar^2}{4\mu}exp[-2\int_{r_2}^{r_3} drk(r)]$$

```
Q value:   3.1370000000000000      MeV
global quantum num G:   20.000000000000000
the number of radial points where Q=V(r):           3
the integration of the first well:   26.702998644328151
(G-L+1)*pi/2=   25.132741928100586
normalization factor F:  0.80965357061424092
gamma:   2.1820042572764433E-047 MeV
half life T:   6.2683944678607131E+048 s
half life T:   1.9876948464804395E+041 yr
```

图 6: 计算结果

将计算结果和文章对比发现数量级有差距, 大概指数是两倍, 可能是单位之类的问题, 需要找一下 bug

^{A}Z	^{A}Z	I_i	I_f	L_α	R(fm)	Q_α(MeV)	T_α(expt.)	T_α(Calc.)
^{209}Bi	^{205}Tl	$9/2^-$	$1/2^+$	5	7.234	3.137	1.9×10^{19} yr	1.8×10^{19} yr

图 7